MATEMATYKA DLA STUDENTÓW POLITECHNIK

Marian Gewert
Zbigniew Skoczylas

Analiza matematyczna 2

Przykłady i zadania

Wydanie dziesiąte

GiS

Semestr drugi

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Laboratorium komputerowe

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Definicje, twierdzenia, wzory

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Przykłady i zadania

Teresa Jurlewicz, Algebra liniowa 2. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Laboratorium komputerowe

Semestr trzeci i czwarty

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Elementy analizy wektorowej. Teoria, przykłady, zadania

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Równania różniczkowe zwyczajne. Laboratorium komputerowe

Jolanta Długosz, Funkcje zespolone. Teoria, przykłady, zadania

Wojciech Kordecki, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Definicje, twierdzenia, wzory

Helena Jasiulewicz, Wojciech Kordecki, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Przykłady i zadania

ISBN 83-85941-87-8

9 788385 941873 >

www.gis.wroc.pl

GiS

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Przykłady i zadania

Wydanie dziesiąte poprawione

Oficyna Wydawnicza **GiS**
Wrocław 2002

Projekt okładki
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Printed in Poland.

Skład skryptu wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 83–85941–87–8

Wydanie X poprawione, Wrocław 2002
Oficyna Wydawnicza **GiS**, s.c.
Druk: TINTA Sp. z o.o., tel.: (0-71) 325 17 88

Spis treści

Wstęp **7**

1. Całki niewłaściwe **9**
- **Pierwszy tydzień** **9**
  - Przykłady 9
  - Zadania 17
  - Odpowiedzi i wskazówki 18

2. Szeregi liczbowe i funkcyjne **19**
- **Drugi tydzień** **19**
  - Przykłady 19
  - Zadania 27
  - Odpowiedzi i wskazówki 28
- **Trzeci tydzień** **29**
  - Przykłady 29
  - Zadania 37
  - Odpowiedzi i wskazówki 38

3. Funkcje dwóch i trzech zmiennych **39**
- **Czwarty tydzień** **39**
  - Przykłady 39
  - Zadania 46
  - Odpowiedzi i wskazówki 47

4. Rachunek różniczkowy funkcji dwóch i trzech zmiennych **48**
- **Piąty tydzień** **48**
  - Przykłady 48
  - Zadania 53
  - Odpowiedzi i wskazówki 54
- **Szósty tydzień** **55**
  - Przykłady 55
  - Zadania 61
  - Odpowiedzi i wskazówki 62

• **Siódmy tydzień** **63**
Przykłady 63
Zadania 69
Odpowiedzi i wskazówki 70
• **Ósmy tydzień** **71**
Przykłady 71
Zadania 79
Odpowiedzi i wskazówki 80

5. Całki podwójne **81**
• **Dziewiąty tydzień** **81**
Przykłady 81
Zadania 87
Odpowiedzi i wskazówki 88
• **Dziesiąty tydzień** **88**
Przykłady 88
Zadania 97
Odpowiedzi i wskazówki 98
• **Jedenasty tydzień** **98**
Przykłady 98
Zadania 105
Odpowiedzi i wskazówki 105

6. Całki potrójne **107**
• **Dwunasty tydzień** **107**
Przykłady 107
Zadania 113
Odpowiedzi i wskazówki 114
• **Trzynasty tydzień** **115**
Przykłady 115
Zadania 122
Odpowiedzi i wskazówki 123
• **Czternasty tydzień** **124**
Przykłady 124
Zadania 132
Odpowiedzi i wskazówki 133

Zbiory zadań **134**

Wstęp

Niniejszy podręcznik jest drugą częścią zestawu książek do **Analizy matematycznej 2**, przeznaczonego dla studentów politechnik. Materiał zawarty w opracowaniu obejmuje całki niewłaściwe, szeregi liczbowe i potęgowe oraz rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych. Podręcznik zawiera przykładowe zadania z pełnymi rozwiązaniami oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Do wszystkich zadań podane są odpowiedzi lub wskazówki. Zadania bez rozwiązań tworzą tzw. listę zadań*. Lista ta powinna być przerabiana przez studentów samodzielnie lub na ćwiczeniach. Aby to ułatwić listę podzielono na 14 części, przeznaczonych do realizacji w kolejnych tygodniach semestru. Materiał teoretyczny niezbędny do rozwiązywania zadań można znaleźć w pierwszej części zestawu pt. *Definicje, twierdzenia, wzory"*.

Przykłady i zadania zawarte w podręczniku są podobnych typów oraz mają zbliżony stopień trudności do zadań, które studenci rozwiązują zwykle na kolokwiach i egzaminach. Zestawy zadań z kolokwiów i egzaminów z poprzednich lat można znaleźć w trzeciej części zestawu pt. *„Kolokwia i egzaminy"*.

W podręczniku trudniejsze przykłady oraz zadania oznaczone są gwiazdką. Zadania te są nieobowiązkowe, a umieszczono je z myślą o studentach, którzy chcą poszerzyć swoją wiedzę z analizy matematycznej. Podobne zadania będą obowiązywały na egzaminie na ocenę celującą.

Do tego wydania dodano kilka nowych przykładów oraz zadań wraz z odpowiedziami. Ponadto poprawiono zauważone błędy i usterki. Dziękujemy Koleżankom

---

*Lista zadań, program kursu oraz zasady jego zaliczania, zalecane w Politechnice Wrocławskiej, są umieszczone na stronach internetowych Instytutu Matematyki pod adresem `www.im.pwr.wroc.pl` i Kolegom z Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej, a szczególnie Pani dr Teresie Jurlewicz oraz Panom dr. Krzysztofowi Bogdanowi, mgr. Andrzejowi Stósowi i dr. Markowi Wilhelmowi, za uwagi o poprzednich wydaniach.

Uprzejmie prosimy Czytelników o przesyłanie nam uwag o podręczniku oraz informacji o zauważonych błędach i usterkach.

Marian Gewert
Instytut Matematyki
Politechnika Wrocławska
gewert@im.pwr.wroc.pl

Zbigniew Skoczylas
Instytut Matematyki
Politechnika Wrocławska
z.skoczylas@im.pwr.wroc.pl

1

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

Pierwszy tydzień

Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju (1.1) #. Kryteria zbieżności całek niewłaściwych pierwszego rodzaju (1.2). Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pierwszego rodzaju (1.3). Całki niewłaściwe drugiego rodzaju (1.4). Kryteria zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju (1.5).

Przykłady

- **Przykład 1.1**

Korzystając z definicji zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

a) $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{x^4}$; b) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4}$; c) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}}$; d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+9}$;

e) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2x}\,dx$; f) $\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty} x\cos x^2\,dx$; g*) $\int\limits_{0}^{\infty} \operatorname{arcctg} x\,dx$; h) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$.

Rozwiązanie

a) Mamy

$$\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{x^4} \stackrel{def}{=} \lim_{T\to\infty} \int\limits_{3}^{T} \frac{dx}{x^4} = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{-1}{3x^3}\right]_3^T = \lim_{T\to\infty} \left(-\frac{1}{3T^3} + \frac{1}{81}\right) = \frac{1}{81},$$

zatem rozważana całka jest zbieżna.

Liczby w nawiasach oznaczają numery paragrafów pierwszej części podręcznika pt. *„Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory”*.

b) Mamy

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^2+4} \stackrel{def}{=} \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{x\,dx}{x^2+4} = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\right]_0^T =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left[\frac{\ln\left(T^2+4\right)}{2} - \ln 2\right] = \infty - \ln 2 = \infty.$$

Ponieważ otrzymaliśmy granicę niewłaściwą, więc rozważana całka jest rozbieżna do ∞.

c) Mamy

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}} \stackrel{def}{=} \lim_{S\to-\infty} \int_S^{-1} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-5}} = \lim_{S\to-\infty} \left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{(3x-5)^2}\right]_S^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{S\to-\infty} \left[4 - \sqrt[3]{(3S-5)^2}\right] = \frac{1}{2}(4-\infty) = -\infty.$$

Otrzymaliśmy granicę niewłaściwą $-\infty$, więc rozważana całka jest rozbieżna do $-\infty$.

d) Przyjmując $a = 0$ w definicji całki niewłaściwej na $(-\infty, \infty)$ otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+9} \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+9} + \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+9}$$

$$\stackrel{def}{=} \lim_{S\to-\infty} \int_S^0 \frac{dx}{x^2+9} + \lim_{T\to\infty} \int_0^T \frac{dx}{x^2+9}$$

$$= \lim_{S\to-\infty} \left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right]_S^0 + \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{S\to-\infty} \left(-\operatorname{arctg}\frac{S}{3}\right) + \frac{1}{3} \lim_{T\to\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{T}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Zatem rozważana całka jest zbieżna.

e) Przyjmując w definicji $a = 0$ otrzymamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x}\,dx \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{0} e^{-2x}\,dx + \int_0^\infty e^{-2x}\,dx$$

$$\stackrel{def}{=} \lim_{S\to-\infty} \int_S^0 e^{-2x}\,dx + \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-2x}\,dx$$

$$= \lim_{S\to-\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_S^0 + \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^T$$

$$= \lim_{S\to-\infty} \left(\frac{1}{2}e^{-2S} - \frac{1}{2}\right) + \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2T}\right) = \left(\infty - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \infty.$$

Ponieważ pierwsza z granic jest równa ∞, a druga jest skończona, więc rozważana całka jest rozbieżna do ∞.

f) Mamy

$$\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty} x\cos x^2\,dx = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{T} x\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\left[\sin x^2\right]_{\sqrt{\pi}}^{T} = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\sin T^2.$$

Ponieważ granica $\lim\limits_{T\to\infty}\sin T^2$ nie istnieje, więc badana całka jest rozbieżna.

g*) Mamy

$$\int\limits_{0}^{\infty}\operatorname{arcctg} x\,dx \overset{def}{=\!=} \lim_{T\to\infty}\int\limits_{0}^{T}\operatorname{arcctg} x\,dx \overset{\bullet}{=\!=} \lim_{T\to\infty}\left[x\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_{0}^{T}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[T\operatorname{arcctg} T + \frac{1}{2}\ln\left(T^2+1\right)\right] \overset{\triangle}{=\!=} 1+\infty=\infty.$$

Badana całka jest zatem rozbieżna do ∞.

Uwaga. W miejscu oznaczonym $\bullet$ do obliczenia całki nieoznaczonej wykorzystano wzór do całkowania przez części, a w miejscu oznaczonym $\triangle$ do obliczenia granicy $\lim\limits_{T\to\infty} T\operatorname{arcctg} T$ zastosowano regułę de L'Hospitala.

h) Mamy

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} \overset{def}{=\!=} \lim_{T\to\infty}\int\limits_{0}^{T}\frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} \overset{\bullet}{=\!=} \lim_{T\to\infty}\left[\operatorname{arctg} e^x\right]_{0}^{T}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[\operatorname{arctg} e^T - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Badana całka jest zatem zbieżna do $\frac{\pi}{4}$.

Uwaga. W miejscu oznaczonym $\bullet$ do obliczenia całki nieoznaczonej zastosowano podstawienie $u=e^x$.

• Przykład 1.2

Korzystając z kryterium porównawczego lub ilorazowego zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

a) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\sin^2 x\,dx$; b) $\displaystyle\int\limits_{2}^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2-\operatorname{arctg} x}$; c) $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty}\frac{e^{3x}\,dx}{3e^{4x}-5}$; d) $\displaystyle\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2+\cos x}$.

Rozwiązanie

a) Dla każdego $x\geqslant 0$ prawdziwe są nierówności

$$0\leqslant e^{-x}\sin^2 x\leqslant e^{-x}.$$

Ponadto całka $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$ jest zbieżna, gdyż

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx \overset{def}{=\!=} \lim_{T\to\infty}\int\limits_{0}^{T} e^{-x}\,dx = \lim_{T\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_{0}^{T} = \lim_{T\to\infty}\left[1-e^{-T}\right]=1.$$

Zatem z kryterium porównawczego wynika zbieżność badanej całki.

b) Dla każdego $x \geqslant 2$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{x}{x^2 - 0} < \frac{x}{x^2 - \operatorname{arctg} x}.$$

Ponadto całka $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x}$ jest rozbieżna do ∞. Zatem z kryterium porównawczego wynika rozbieżność do ∞ badanej całki.

c) Przyjmując w kryterium ilorazowym zbieżności całek niewłaściwych

$$f(x) = e^{-x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{e^{3x}}{3e^{4x} - 5},$$

otrzymamy

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{3e^{4x} - 5}{e^{4x}} = 3.$$

Ponieważ całka $\int\limits_1^\infty e^{-x}\, dx$ jest zbieżna oraz $0 < k < \infty$, więc badana całka także jest zbieżna.

d) W kryterium ilorazowym zbieżności całek niewłaściwych przyjmujemy

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{x}{x^2 + \cos x}.$$

Wtedy

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + \cos x}{x^2} = 1.$$

Ponieważ całka $\int\limits_\pi^\infty \frac{dx}{x}$ jest rozbieżna do ∞ oraz $0 < k < \infty$, więc badana całka także jest rozbieżna do ∞.

• Przykład 1.3

Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną podanych całek niewłaściwych:

a) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin^3 x}{x^2}\, dx$; b) $\int\limits_2^\infty \frac{x \cos x}{(x^2 - 1)^3}\, dx$; c) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty x \cos x\, dx$; d*) $\int\limits_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Rozwiązanie

a) Dla każdego $x \geqslant 1$ prawdziwa jest nierówność

$$0 \leqslant \left| \frac{\sin^3 x}{x^2} \right| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

Ponieważ całka $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ jest zbieżna, więc badana całka jest zbieżna bezwzględnie. Z kolei ze zbieżności bezwzględnej całek niewłaściwych wynika ich zbieżność, zatem rozważana całka jest także zbieżna.

b) Zauważmy, że dla każdego $x \geqslant 2$ zachodzą nierówności

$$0 \leqslant \left|\frac{x\cos x}{(x^2-1)^3}\right| \leqslant \frac{x}{(x^2-1)^3}.$$

Ponadto całka $\int\limits_2^\infty \frac{x\,dx}{(x^2-1)^3}$ jest zbieżna, gdyż

$$\int\limits_2^\infty \frac{x\,dx}{(x^2-1)^3} \overset{def}{=} \lim_{T\to\infty}\int\limits_2^T \frac{x\,dx}{(x^2-1)^3} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{-1}{4\,(x^2-1)^2}\right]_2^T = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{36}-\frac{1}{4\,(T^2-1)^2}\right] = \frac{1}{36}.$$

Zatem badana całka jest zbieżna bezwzględnie. Ponieważ zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pociąga za sobą ich zbieżność, więc rozważana całka niewłaściwa jest także zbieżna.

c) Pokażemy, że badana całka jest rozbieżna. Mamy

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty x\cos x\,dx = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^T x\cos x\,dx \quad \boxed{\text{całkowanie przez części}}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left[x\sin x+\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^T = \lim_{T\to\infty}\left(T\sin T+\cos T\right)-\frac{\pi}{2}.$$

Ponieważ otrzymana granica nie istnieje, więc badana całka jest rozbieżna. Rozbieżność całki $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty |x\cos x|\,dx$ wynika, z twierdzenia o zbieżności całek niewłaściwych zbieżnych bezwzględnie. Gdyby bowiem całka ta była zbieżna, to byłaby zbieżna także całka $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^\infty x\cos x\,dx$, co jak pokazaliśmy powyżej nie zachodzi.

d*) Pokażemy, że badana całka nie jest zbieżna bezwzględnie, ale jest zbieżna. W rozwiązaniu wykorzystamy nierówność $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$ zachodzącą dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$. Wykorzystując tę nierówność otrzymamy

$$\int\limits_\pi^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \int\limits_\pi^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int\limits_\pi^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx + \int\limits_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx + \ldots$$

$$\geqslant \int\limits_\pi^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{2\pi}\,dx + \int\limits_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin^2 x}{3\pi}\,dx + \int\limits_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin^2 x}{4\pi}\,dx + \ldots$$

$$= \left(\int\limits_\pi^{2\pi} \sin^2 x\,dx\right)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{3\pi}+\frac{1}{4\pi}+\ldots\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\right) = \infty.$$

Oznacza to, że badana całka nie jest zbieżna bezwzględnie.
Uzasadnienie jej zbieżności jest bardziej skomplikowane. Wymaga ono zastosowania twierdzenia Dirichleta. Twierdzenie to orzeka, że jeżeli funkcja g ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,\infty)$ oraz monotonicznie maleje do 0, gdy $x \to \infty$, a funkcja ciągła f ma ograniczoną funkcję pierwotną na $[a,\infty)$, to całka niewłaściwa

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$$

jest zbieżna. Łatwo sprawdzić, że funkcje $g(x) = \sin x$ oraz $f(x) = \frac{1}{x}$ spełniają na przedziale $[\pi,\infty)$ założenia twierdzenia Dirichleta. Zatem rozważana całka jest zbieżna.

• Przykład 1.4

Korzystając z defnicji zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych drugiego rodzaju (dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości):

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$; b) $\displaystyle\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \frac{dx}{\sin^2 x}$; c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-1}$; d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}$; e) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}\,dx}{x^2}$.

Rozwiązanie

a) Funkcja $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ jest nieograniczona tylko na lewostronnym sąsiedztwie punktu 1, zatem

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} \overset{def}{=} \lim_{B\to 1^-} \int_0^B \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$$
$$= \lim_{B\to 1^-} \left[-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1-x)^2}\right]_0^B = \frac{3}{2}\lim_{B\to 1^-}\left[1-\sqrt[3]{(1-B)^2}\right] = \frac{3}{2}.$$

Badana całka jest zbieżna.

b) Funkcja $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu π, zatem

$$\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi} \frac{dx}{\sin^2 x} \overset{def}{=} \lim_{A\to\pi+} \int_A^{\frac{3}{2}\pi} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{A\to\pi+}\left[-\operatorname{ctg} x\right]_A^{\frac{3}{2}\pi} = \lim_{A\to\pi+}\left[0+\operatorname{ctg} A\right] = \infty.$$

Badana całka jest rozbieżna do ∞.

c) Ponieważ funkcja podcałkowa $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu -1 oraz na lewostronnym sąsiedztwie punktu 1, więc przyjmując w określeniu całki niewłaściwej za miejsce podziału $a = 0$ otrzymamy

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-1} \overset{def}{=} \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2-1} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2-1}.$$

Zbadamy z definicji zbieżność każdej z całek po prawej stronie znaku równości. Mamy

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-1} \stackrel{def}{=} \lim_{B\to 1-} \int_0^B \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{B\to 1-} \left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_0^B = \frac{1}{2}\lim_{B\to 1-} \ln\frac{1-B}{1+B} = -\infty.$$

Z parzystości funkcji podcałkowej wynika, że także

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2-1} = -\infty.$$

Zatem badana całka jest rozbieżna do $-\infty$.

d) Ponieważ funkcja podcałkowa $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}$ jest nieograniczona tylko na obu jednostronnych sąsiedztwach punktu $\dfrac{\pi}{6}$, więc rozważana całka niewłaściwa jest określona wzorem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} \stackrel{def}{=} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}}.$$

Zbadamy zbieżność każdej z całek po prawej stronie znaku równości. Dla pierwszej całki mamy

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = \lim_{B\to\frac{\pi}{6}-} \int_0^B \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = -\frac{3}{4}\lim_{B\to\frac{\pi}{6}-} \left[\sqrt[3]{(1-2\sin x)^2}\right]_0^B$$

$$= -\frac{3}{4}\lim_{B\to\frac{\pi}{6}-} \left[\sqrt[3]{(1-2\sin B)^2}-1\right] = \frac{3}{4}.$$

Dla drugiej całki mamy

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = \lim_{A\to\frac{\pi}{6}+} \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{1-2\sin x}} = -\frac{3}{4}\lim_{A\to\frac{\pi}{6}+} \left[\sqrt[3]{(1-2\sin x)^2}\right]_A^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{3}{4}\lim_{A\to\frac{\pi}{6}+} \left[1-\sqrt[3]{(1-2\sin A)^2}\right] = -\frac{3}{4}.$$

Zatem badana całka jest zbieżna do $\dfrac{3}{4} + \left(-\dfrac{3}{4}\right) = 0.$

e) Ponieważ funkcja $f(x) = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$ jest nieograniczona tylko na prawostronnym sąsiedztwie punktu 0, więc badaną całkę określamy wzorem

$$\int_0^{\frac{3}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}\,dx}{x^2} \stackrel{def}{=} \lim_{A\to 0+} \int_A^{\frac{3}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}\,dx}{x^2} = \lim_{A\to 0+} \left[\cos\frac{1}{x}\right]_A^{\frac{3}{\pi}} = \frac{1}{2} - \lim_{A\to 0+} \cos\frac{1}{A}.$$

Ponieważ otrzymana granica nie istnieje, więc badana całka jest rozbieżna.

• Przykład 1.5

Korzystając z kryterium porównawczego lub ilorazowego zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

a) $\int\limits_0^1 \frac{1+\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$; b) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{(x-1)^2}\,dx$; c) $\int\limits_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x^3}}$; d) $\int\limits_0^1 \frac{e^x-1}{x^4}\,dx$.

Rozwiązanie

a) Zauważmy, że dla każdego $x>0$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{1+\sin x}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Ponadto całka niewłaściwa $\int\limits_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{x}}$ jest zbieżna. Zatem z kryterium porównawczego wynika, że badana całka jest także zbieżna.

b) Dla każdego $x>0$ prawdziwe są nierówności

$$0 < \frac{1}{(x-1)^2} < \frac{e^x}{(x-1)^2}.$$

Ponadto całka niewłaściwa $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ jest rozbieżna do ∞. Zatem z kryterium porównawczego wynika, że badana całka jest także rozbieżna do ∞.

c) Przyjmując w kryterium ilorazowym zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{oraz} \quad g(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x^3}},$$

otrzymamy

$$k=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Ponieważ całka $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ jest zbieżna oraz $0<k<\infty$, więc badana całka także jest zbieżna.

d) Przyjmując w kryterium ilorazowym $f(x)=\frac{1}{x^3}$ oraz $g(x)=\frac{e^x-1}{x^4}$, otrzymamy

$$k=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{e^x-1}=1.$$

Ponieważ całka $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3}$ jest rozbieżna do ∞ oraz $0<k<\infty$, więc badana całka także jest rozbieżna do ∞.

Zadania

Zadanie 1.1

Korzystając z definicji zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2}$; b) $\displaystyle\int_0^{\infty} 2^{-x}\,dx$; c) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} x\sin x\,dx$; d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4}$;

e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+5}}$; f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+13}$; g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx$; h*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} (\pi-\operatorname{arcctg} x)\,dx$.

Zadanie 1.2

Korzystając z kryterium porównawczego lub ilorazowego zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

a) $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$; b) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{(x-1)\,dx}{x^4+x+1}$; c) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{1+\sin x}{x^3}\,dx$; d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{2^x\,dx}{x-1}$;

e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^7+1}}$; f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \sin^2\frac{1}{x}\,dx$; g) $\displaystyle\int_5^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5-3}}$; h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{2x}+1}{e^x-1}\,dx$;

i*) $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x^2} e^{-x}\,dx$; j) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^3-\sin x}$; k*) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^x}$; l) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{2}+\cos x}{\sqrt{x}-1}\,dx$.

Zadanie 1.3

Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną podanych całek niewłaściwych:

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin 3x\,dx}{e^{2x}+1}$; b) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} x\cos 2x\,dx$; c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\cos x\,dx}{x^2+1}$; d*) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Zadanie 1.4

Korzystając z definicji zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych drugiego rodzaju (dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości):

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$; b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin x}$; c) $\displaystyle\int_2^{3} \frac{dx}{x(x-3)}$; d) $\displaystyle\int_0^{e} \frac{\ln x\,dx}{x}$; e*) $\displaystyle\int_0^{e} \frac{\sin\ln x\,dx}{x}$.

Zadanie 1.5

Korzystając z kryterium porównawczego lub ilorazowego zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

a) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; b) $\int\limits_0^2 \frac{e^x\,dx}{x^3}$; c) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt[3]{x-\pi}}$; d) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$;

e) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{x^4}\,dx$; f) $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}-1}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx$; g) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$; h) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(\arcsin x)^2}$;

i*) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{e^x - e^{2x}}}$; j*) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{x-\sin x}$; k*) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2-\sqrt{x}}$; l*) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

Odpowiedzi i wskazówki

1.1 a) $\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{1}{\ln 2}$; **c)** rozbieżna; **d)** $\frac{\pi}{4}$; **e)** ∞; **f)** $\frac{\pi}{3}$; **g)** ∞; **h*)** ∞.

1.2 a); **h)**; **i*)**; **j)**; **l)** rozbieżna; **b)**; **c)**; **d)**; **e)**; **f)**; **g)**; **k*)** zbieżna;
Wskazówka do **i*)**. Pokazać, korzystając z reguły de L'Hospitala, że funkcja podcałkowa w ∞ ma granicę $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

1.3 a); **c)** zbieżna bezwzględnie; **b)** rozbieżna; **d*)** zbieżna, ale nie zbieżna bezwzględnie.

1.4 a) $\frac{5}{3}$; **b)** ∞; **c)** $-\infty$; **d)** $-\infty$; **e*)** rozbieżna.

1.5 a); **c)**; **d)**; **f)**; **g)**; **i*)** zbieżna; **b)**; **e)**; **h)**; **j*)**; **k*)**; **l*)** rozbieżna.

2

SZEREGI LICZBOWE I FUNKCYJNE

Drugi tydzień

Definicje i podstawowe twierdzenia (2.1). Kryteria zbieżności szeregów (2.2). Zbieżność bezwzględna szeregów (2.3).

Przykłady

• **Przykład 2.1**

Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 1}{5^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}$; c) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(2n - 1)$; e*) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{2\pi}{3^n} \cos\frac{4\pi}{3^n}$; f) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}\right)$.

Rozwiązanie

a) Dla każdego $n \geqslant 0$ mamy

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k - 1}{5^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{5}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k \\
&\overset{\bullet}{=} \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}\left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right] - \frac{5}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right].
\end{aligned}
$$

W miejscu oznaczonym • korzystaliśmy ze wzoru na sumę $n + 1$ wyrazów ciągu geometrycznego

$$
1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad \text{gdzie } q \neq 1.
$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{5}{2}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]-\frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right]\right\} = \frac{5}{2}(1-0)-\frac{5}{4}(1-0)=\frac{5}{4},$$

więc badany szereg jest zbieżny i ma sumę $\frac{5}{4}$.

b) Zauważmy najpierw, że dla każdego $n \in \boldsymbol{N}$ mamy

$$\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)} = 1+\frac{1}{n(n+1)} = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k+1}{k(k+1)} &= \frac{3}{1\cdot 2}+\frac{7}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} \\ &= \left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= n+1-\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Tak więc

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right) = \infty.$$

Oznacza to, że badany szereg jest rozbieżny do ∞.

c) Dla każdego $n \geqslant 2$ mamy

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\ln\frac{(k+1)(k-1)}{k^2} \\ &= \sum_{k=2}^{n}\left[\ln(k+1)+\ln(k-1)-2\ln k\right] \\ &= [\ln 3+\ln 1-2\ln 2]+[\ln 4+\ln 2-2\ln 3] \\ &\quad +[\ln 5+\ln 3-2\ln 4]+\ldots+[\ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n] \\ &= \ln(n+1)-\ln n-\ln 2 = \ln\frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{2n} = -\ln 2$, więc badany szereg jest zbieżny do $-\ln 2$.

d) Dla każdego $n \geqslant 1$ mamy

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(2k-1) = 1-3+5-7+\ldots+(-1)^{n+1}(2n-1) = (-1)^{n+1}n.$$

Ponieważ granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}n$ nie istnieje, więc badany szereg jest rozbieżny.

e*) W rozwiązaniu wykorzystamy tożsamość

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right).$$

Przyjmując w niej $\alpha = \frac{2\pi}{3^n}$ oraz $\beta = \frac{4\pi}{3^n}$ otrzymamy

$$\sin\frac{2\pi}{3^n}\cos\frac{4\pi}{3^n} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3^{n-1}} - \sin\frac{2\pi}{3^n}\right).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
S_n &\stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{2\pi}{3^k}\cos\frac{4\pi}{3^k} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2\pi}{3^{k-1}} - \sin\frac{2\pi}{3^k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\sin\frac{2\pi}{3^0} - \sin\frac{2\pi}{3^1}\right) + \left(\sin\frac{2\pi}{3^1} - \sin\frac{2\pi}{3^2}\right) + \ldots + \left(\sin\frac{2\pi}{3^{n-1}} - \sin\frac{2\pi}{3^n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin 2\pi - \sin\frac{2\pi}{3^n}\right) = -\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3^n}.
\end{aligned}$$

Wyznaczymy teraz sumę badanego szeregu. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sin\frac{2\pi}{3^n} = 0.$$

Zatem badany szereg jest zbieżny i ma sumę 0.

f) Dla każdego $n \geqslant 2$ mamy

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{n}\left(\sqrt[k]{k} - \sqrt[k+1]{k+1}\right) \\
&= \left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}\right) + \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[4]{4}\right) + \left(\sqrt[4]{4} - \sqrt[5]{5}\right) + \ldots + \left(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}\right) \\
&= \sqrt{2} - \sqrt[n+1]{n+1}.
\end{aligned}$$

Zbadamy teraz zbieżność rozważanego szeregu. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2} - \sqrt[n+1]{n+1}\right) = \sqrt{2} - 1.$$

Zatem badany szereg jest zbieżny i ma sumę $\sqrt{2} - 1$.

• Przykład 2.2

Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność podanych szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^{n^3}}$; d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$; e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Rozwiązanie

a) Niech $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$. Funkcja f jest malejąca na przedziale $[2, \infty)$ oraz przyjmuje tam wartości dodatnie. Zbadamy zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$. Mamy

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} \stackrel{def}{=} \lim_{T\to\infty}\int_2^{T}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{T\to\infty}\Big[\ln(\ln x)\Big]_2^T = \lim_{T\to\infty}\big[\ln(\ln T) - \ln(\ln 2)\big] = \infty.$$

Oznacza to, że całka $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$ jest rozbieżna do ∞. Zatem z kryterium całkowego wynika, że badany szereg także jest rozbieżny do ∞.

b) Niech $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$. Funkcja f jest malejąca na przedziale $[1,\infty)$ oraz przyjmuje tam wartości dodatnie. Zbadamy zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+2}$. Mamy

$$\begin{aligned}\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+2} &\overset{def}{=} \lim_{T\to\infty}\int\limits_1^T \frac{dx}{x^2+2} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_1^T\\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{T}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Oznacza to, że rozważana całka jest zbieżna. Zatem z kryterium całkowego wynika, że badany szereg jest zbieżny.

c) Niech $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^3}}$. Funkcja ta jest malejąca na przedziale $[1,\infty)$ i ma tam wartości dodatnie. Monotoniczność tej funkcji można uzasadnić badając znak jej pochodnej. Teraz, korzystając z definicji, zbadamy zbieżność całki niewłaściwej

$$\begin{aligned}\int\limits_1^\infty \frac{x^2\,dx}{e^{x^3}} &\overset{def}{=} \lim_{T\to\infty}\int\limits_1^T \frac{x^2\,dx}{e^{x^3}} \boxed{\begin{array}{l} u = x^3\\ u(1)=1\\ u(T)=T^3\\ du = 3x^2\,dx\end{array}} = \lim_{T\to\infty}\int\limits_1^{T^3}\frac{1}{3}e^{-u}\,du\\ &= \frac{1}{3}\lim_{T\to\infty}\left[-e^{-u}\right]_1^{T^3} = \frac{1}{3}\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^{T^3}}\right) = \frac{1}{3e}.\end{aligned}$$

Ponieważ całka niewłaściwa jest zbieżna, więc z kryterium całkowego wynika, że także badany szereg jest zbieżny.

d) Niech $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$. Funkcja f ma wartości nieujemne dla wszystkich $x \geqslant 0$. Badając znak pochodnej tej funkcji, pokażemy, że jest ona malejąca na przedziale $[1,\infty)$. Rzeczywiście mamy

$$f'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} < 0 \Longleftrightarrow x > 1.$$

Zbadamy teraz zbieżność całki niewłaściwej. Mamy

$$\begin{aligned}\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1} &\overset{def}{=} \lim_{T\to\infty}\int\limits_1^T \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1} \boxed{\begin{array}{l} u = \sqrt{x}\\ u(1)=1\\ u(T)=\sqrt{T}\\ 2u\,du = dx\end{array}} = \lim_{T\to\infty}\int\limits_1^{\sqrt{T}}\frac{2u^2\,du}{u^2+1}\\ &= \lim_{T\to\infty} 2\int\limits_1^{\sqrt{T}}\left(1 - \frac{1}{u^2+1}\right)du = 2\lim_{T\to\infty}\left[u - \operatorname{arctg} u\right]_1^{\sqrt{T}}\\ &= 2\lim_{T\to\infty}\left(\sqrt{T} - \operatorname{arctg}\sqrt{T} - 1 + \frac{\pi}{4}\right) = \infty.\end{aligned}$$

Ponieważ całka niewłaściwa jest rozbieżna do ∞, więc także badany szereg jest rozbieżny do ∞.

e) Niech $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^2 x}$. Funkcja f jest malejąca na przedziale $[2,\infty)$ oraz przyjmuje tam wartości dodatnie. Możemy zatem zastosować kryterium całkowe zbieżności szeregów. Mamy

$$\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x} \overset{def}{=} \lim_{T\to\infty}\int\limits_2^T \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{-1}{\ln x}\right]_2^T = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln T}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Ponieważ całka niewłaściwa $\int\limits_2^\infty \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$ jest zbieżna, więc także szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ jest zbieżny.

• Przykład 2.3

Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność podanych szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^3+1}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{1}{n^2}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^2\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{n^2-3}$; e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+1}{3^n-1}$.

Rozwiązanie

a) Dla każdego $n\in N$ mamy

$$0\leqslant \frac{n}{n^3+1}\leqslant\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}.$$

Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ jest zbieżny, więc z kryterium porównawczego wynika, że badany szereg także jest zbieżny.

b) Dla każdego $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ prawdziwa jest nierówność $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$, więc dla każdego $n\in N$ mamy

$$n\sin\frac{1}{n^2}>n\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}.$$

Ponieważ szereg $\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ jest rozbieżny do ∞, więc z kryterium porównawczego wynika, że badany szereg jest także rozbieżny do ∞.

c) Wykorzystując nierówność $\operatorname{tg}x\geqslant x$, prawdziwą dla każdego $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, otrzymamy

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\frac{1}{n}\quad\text{dla } n\in N.$$

Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ jest rozbieżny do ∞ i ma nieujemne wyrazy, więc także badany szereg jest rozbieżny do ∞.

d) Łatwo sprawdzić, że badany szereg ma wyrazy nieujemne. Pokażemy niżej, że dla $n\geqslant 4$ spełniona jest nierówność

$$\frac{\sqrt{n}+1}{n^2-3}\leqslant\frac{2}{n\sqrt{n}}.$$

Rzeczywiście, nierówność ta po przekształceniach przyjmuje równoważną postać

$$6 \leqslant n\left(n-\sqrt{n}\right).$$

Zauważmy teraz, że ciąg $x_n = n\left(n-\sqrt{n}\right)$ jest rosnący i dla $n=4$ przyjmuje wartość większą niż 6. Stąd wynika, że rozważana nierówność jest prawdziwa dla każdego $n \geqslant 4$. Ponieważ szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}}$$

jest zbieżny i ma wyrazy nieujemne, więc z kryterium porównawczego wynika zbieżność badanego szeregu.

e) Szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n-1}$ ma wyrazy dodatnie. Pokażemy, że dla $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\frac{2^n+1}{3^n-1} \leqslant 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Rzeczywiście, nierówność ta jest równoważna nierówności

$$6^n + 3^n \leqslant 2\cdot 6^n - 2\cdot 2^n,$$

a ta z kolei jest równoważna nierówności

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 1,$$

która jest prawdziwa dla $n \geqslant 2$. Ponieważ szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$ jest zbieżny, więc z kryterium porównawczego wynika, że badany szereg także jest zbieżny.

- **Przykład 2.4**

Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność podanych szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{5^n-4^n}$; c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)(3n)!}{[(2n)!]^2}$; e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$;

Rozwiązanie

a) Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^3}}{\dfrac{3^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\left[3\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\right] = 3\cdot 1^3 = 3 > 1,$$

więc z kryterium d'Alemberta wynika, że badany szereg jest rozbieżny do ∞.

b) Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{5^{n+1}-4^{n+1}}}{\dfrac{3^n-2^n}{5^n-4^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(3^{n+1}-2^{n+1}\right)\left(5^n-4^n\right)}{\left(3^n-2^n\right)\left(5^{n+1}-4^{n+1}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left[3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]}{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\left[5-4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]} = \frac{(3-2\cdot 0)(1-0)}{(1-0)(5-4\cdot 0)} = \frac{3}{5} < 1,$$

więc z kryterium d'Alemberta wynika, że badany szereg jest zbieżny.

c) Dla $n \geqslant 2$ mamy

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}}\right].$$

Ponieważ $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$, więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=1 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}}=1.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^n}}\right] = \frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{2}<1.$$

Z kryterium d'Alemberta wynika zatem, że badany szereg jest zbieżny.

d) Wyraz ogólny rozważanego szeregu ma postać

$$a_n = \frac{(n!)(3n)!}{[(2n)!]^2}$$

zatem

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!\,[3(n+1)]!}{\{[2(n+1)]!\}^2} = \frac{n!(n+1)(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{[(2n)!]^2\,(2n+1)^2(2n+2)^2}.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3(3n+1)(3n+2)}{4(2n+1)^2} = \frac{27}{16}.$$

Ponieważ $\frac{27}{16}>1$, więc z kryterium d'Alemberta wynika, że badany szereg jest rozbieżny do ∞.

e) W badanym szeregu mamy

$$a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}},\quad a_{n+1} = \frac{[2(n+1)]!}{(n+1)^{2(n+1)}} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^{2n}(n+1)^2} = \frac{2(2n)!(2n+1)}{(n+1)^{2n}(n+1)}.$$

Obliczymy teraz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n}2(2n+1)}{(n+1)^{2n}(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-2}\cdot\frac{2(2n+1)}{n+1}\right\} = \frac{4}{e^2}.$$

Ponieważ $\frac{4}{e^2}<1$, więc badany szereg jest zbieżny.

• Przykład 2.5

Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność podanych szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$; b) $\sum_{n=2}^{\infty}\pi^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}n}{\pi}\right)^n$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-5)^n}{\sqrt{n^n}}$.

Rozwiązanie

a) Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\frac{2}{3}<1,$$

więc z kryterium Cauchy'ego wynika, że badany szereg jest zbieżny.

b) Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\pi^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\pi\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\pi\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{\pi}{e}>1,$$

więc z kryterium Cauchy'ego wynika, że badany szereg jest rozbieżny do ∞.

c) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{\operatorname{arctg} n}{\pi}\right)^n}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg} n=\frac{1}{2}.$$

Ponieważ otrzymana granica jest mniejsza od 1, więc badany szereg jest zbieżny.

d) Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|n-5|^n}{\sqrt{n^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{|n-5|}{\sqrt{n}}=\infty.$$

Ponieważ otrzymana granica jest niewłaściwa, więc badany szereg jest rozbieżny do ∞.

• Przykład 2.6

Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność podanych szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n^4+n+1}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arcctg} n$; c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log_2\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$; d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n!+1}{(n+2)!}$.

Rozwiązanie

a) Przyjmując w kryterium ilorazowym $a_n=\dfrac{3n+2}{n^4+n+1}>0$ oraz $b_n=\dfrac{1}{n^3}>0$ otrzymamy

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(3n+2)}{n^4+n+1}=3.$$

Ponieważ szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ jest zbieżny oraz $0<k<\infty$, więc badany szereg jest również zbieżny.

b) Przyjmując w kryterium ilorazowym $a_n=\operatorname{arcctg} n>0$ i $b_n=\dfrac{1}{n}>0$ oraz korzystając z faktu, że

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arcctg} x}{\frac{1}{x}}\boxed{\frac{0}{0}}\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1,$$

otrzymamy

$$k=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arcctg} n}{\frac{1}{n}}=1.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny do ∞ oraz $0 < k < \infty$, więc badany szereg także jest rozbieżny do ∞.

c) Przyjmując w kryterium ilorazowym $a_n = \log_2\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) > 0$, $b_n = \frac{1}{2^n} > 0$ oraz wykorzystując równość

$$\lim_{w \to 0} \frac{\log_a(1+w)}{w} = \frac{1}{\ln a},$$

mamy

$$k = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log_2\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Ponieważ $0 < k < \infty$ oraz szereg geometryczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ jest zbieżny, więc badany szereg także jest zbieżny.

d) W kryterium ilorazowym przyjmujemy $a_n = \frac{2n! + 1}{(n+2)!}$ oraz $b_n = \frac{1}{n^2}$ (oba szeregi mają wyrazy dodatnie). Wtedy

$$k = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2\,(2n! + 1)}{n!(n+1)(n+2)} = \lim_{n \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{n!}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = 2.$$

Ponieważ otrzymana granica spełnia nierówność $0 < k < \infty$ oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, więc także badany szereg jest zbieżny.

Zadania

O Zadanie 2.1

Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$; b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$; d*) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$.

Uwaga. W przykładzie b) przyjąć, że $S_n = \sum_{k=2}^{n} a_k$, gdzie $n \geqslant 2$.

O Zadanie 2.2

Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność podanych szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}$; c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; e*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, 2^{-\sqrt{n}}$.

○ **Zadanie 2.3**

Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność podanych szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$;

d*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$; e*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{n3^n+2^n}$.

○ **Zadanie 2.4**

Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność podanych szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$; f*) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1-\sqrt[k]{2}\right)$; g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{n^5+1}$; h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3^n+1)^3}{(5^n+1)^2}$.

○ **Zadanie 2.5**

Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność podanych szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{2n}}{(2n^2+1)^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+4^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{1}{n^2}$.

○ **Zadanie 2.6**

Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność podanych szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^3-1}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n-1}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}$; d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{3^n}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}$.

Odpowiedzi i wskazówki

2.1 a) $S_n = 6 - 6\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 6$; **b)** $S_n = 1 - \frac{1}{n!}$, gdzie $n \geqslant 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$; **c)** $S_n = \sqrt{n+1} - 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$; **d*)** Wskazówka. Udowodnić i wykorzystać tożsamość $\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2n-1} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}$, $S_n = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$.

2.2 a); **c)**; **d)**; **f)** zbieżny; **b)**; **e*)** rozbieżny.

2.3 a); **c)**; **e*)** zbieżny; **b)**; **d*)**; **f)** rozbieżny.
Wskazówka do **e*)**. Wykorzystać nierówność $\ln n \geqslant e^2$ zachodzącą dla $n \geqslant e^{e^2}$.

2.4 a); **b)**; **c)**; **d)**; **e)**; **f*)** zbieżny; **g)**; **h)** rozbieżny.

2.5 a); **b)**; zbieżny; **c)**; **d)** rozbieżny.

2.6 a) rozbieżny; **b)**; **c)**; **d)** zbieżny.

Trzeci tydzień

Szeregi potęgowe (2.4).

Przykłady

- **Przykład 3.1**

Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną podanych szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}$; b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$.

Rozwiązanie

a) Zbadamy najpierw zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}$. Zauważmy, że ciąg $\left(\sin\frac{1}{n}\right)$ jest malejący i zbieżny do 0. Zatem, z twierdzenia Leibniza o szeregu naprzemiennym wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n}$ jest zbieżny. Zbadamy teraz zbieżność bezwzględną rozważanego szeregu. Zauważmy, że dla każdego $n\in\boldsymbol{N}$ prawdziwe są nierówności

$$0\leqslant\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\sin\frac{1}{n}.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny do ∞, więc z kryterium porównawczego wynika, że także szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ jest rozbieżny do ∞. Rozważany szereg jest zatem zbieżny warunkowo.

b) W tym przypadku zbadamy najpierw zbieżność bezwzględną, czyli zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{3^n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}.$$

W tym celu wykorzystamy kryterium Cauchy'ego. Mamy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}=\frac{e}{3}<1.$$

Tak więc szereg $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}$ jest zbieżny. Oznacza to, że badany szereg jest zbieżny bezwzględnie, a więc także zbieżny.

c) Zbadamy najpierw zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$. Pokażemy, że ciąg $\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)$

jest malejący. Rzeczywiście podnosząc do kwadratu obie strony nierówności (które są dodatnie)

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} > \frac{\sqrt{n+2}}{n+3}$$

otrzymamy kolejno nierówności równoważne

$$(n+1)(n+3)^2 > (n+2)^3 \iff n^3 + 7n^2 + 15n + 9 > n^3 + 6n^2 + 12n + 8.$$

Ostatecznie nierówność jest prawdziwa dla każdego $n \in N$. Zatem ciąg $\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)$ jest malejący. Ponadto mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = 0,$$

zatem z twierdzenia Leibniza wynika, że szereg naprzemienny $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ jest zbieżny. Zbadamy teraz jego bezwzględną zbieżność. Pokażemy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ jest rozbieżny do ∞. Wynika to z kryterium ilorazowego rozbieżności szeregów. Rzeczywiście, przyjmując $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} > 0$ oraz $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$, mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1,$$

a ponieważ szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ jest rozbieżny do ∞, więc także szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ jest rozbieżny do ∞.

• Przykład 3.2

Wykazać zbieżność odpowiedniego szeregu i następnie na podstawie warunku koniecznego zbieżności szeregów uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n^{n+1}} = 0;$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{1000^n} = \infty;$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)(2n)!}{(3n)!} = 0.$

Rozwiązanie

a) Rozważmy szereg, którego n–ty wyraz a_n jest n–tym wyrazem badanego ciągu czyli szereg postaci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n^{n+1}}$. Dla zbadania zbieżności tego szeregu wykorzystamy kryterium d'Alemberta. Mamy zatem

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!}{(n-1)!}\cdot\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = \frac{1}{e} < 1.$$

Tak więc rozważany szereg jest zbieżny. Zatem wobec warunku koniecznego zbieżności szeregów $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!}{n^{n+1}} = 0.$$

b) W tym przykładzie rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$. Zbieżność tego szeregu jak powyżej wynika z kryterium d'Alemberta, gdyż mamy

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1.$$

Zatem wobec warunku koniecznego zbieżności szeregów mamy $\lim_{n\to\infty} \frac{1000^n}{n!} = 0^+$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{1000^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000^n}{n!}} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

c) Analogicznie ja w przykładzie a) rozważmy szereg, którego n-ty wyraz a_n jest n-tym wyrazem badanego ciągu, czyli szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)(2n)!}{(3n)!}$. Dla zbadania zbieżności tego szeregu wykorzystamy kryterium d'Alemberta. Mamy zatem

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!}}{\dfrac{(n)!(2n)!}{(3n)!}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n!(n+1)(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \cdot \frac{(3n)!}{n!(2n)!}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)(2n+2)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{4}{27} < 1.
\end{aligned}$$

Tak więc nasz szereg jest zbieżny. Korzystając teraz z warunku konicznego zbieżności szeregów mamy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!)(2n)!}{(3n)!} = 0.$$

• Przykład 3.3

Wyznaczyć przedziały zbieżności podanych szeregów potęgowych:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(n+1)^2 2^n}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(x+2)^n$.

Rozwiązanie

a) Rozpoczniemy od obliczenia promienia zbieżności. Mamy

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n+3}{2n+1}\right| = 1.$$

Zatem wobec twierdzenia Cauchy'ego–Hadamarda rozważany szereg jest zbieżny dla każdego $x \in (1-1, 1+1) = (0, 2)$ oraz ewentualnie na końcach tego przedziału. Zbadamy teraz jego zbieżność w punktach $x = 0$ i $x = 2$. Dla $x = 0$ rozważany szereg przyjmuje postać $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Zbieżność tego szeregu wynika z twierdzenia Leibniza o szeregu naprzemiennym. Natomiast dla $x = 2$ szereg przyjmuje postać $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$. Szereg ten jest rozbieżny do ∞, co łatwo uzasadnić korzystając z kryterium porównawczego. Zatem $[0, 2)$ jest przedziałem zbieżności badanego szeregu.

b) Analogicznie jak w poprzednim przypadku obliczenia rozpoczniemy od wyznaczenia promienia zbieżności. Mamy

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^2 2^n}{n^2}} = 2 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)^2}{n^2}} = 2.$$

Zatem badany szereg potęgowy jest zbieżny dla każdego $x \in (0-2, 0+2) = (-2, 2)$ oraz ewentualnie na końcach tego przedziału. Zbadamy teraz jego zbieżność w punktach $x = -2$ i $x = 2$. Podstawiając w badanym szeregu potęgowym $x = -2$ otrzymamy szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$. Szereg ten jest rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregów (granica $\lim_{n\to\infty} \left[(-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right]$ nie istnieje). Podobna sytuacja występuje w punkcie $x = 2$. Zatem przedziałem zbieżności tego szeregu jest $(-2, 2)$.

c) Analogicznie jak w przykładzie **a)** promień zbieżności obliczymy ze wzoru

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{n!}}{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} = \infty.$$

Zatem badany szereg jest zbieżny dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$.

• Przykład 3.4

Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i ustalić przedziały ich zbieżności:

a) $\frac{4x}{x+2}$; b) $x \sin 3x$; c) $\frac{3}{1+x-2x^2}$; d) $\cos^2 x$;

e*) $\operatorname{arctg} x$; f) $\frac{e^{2x}-1}{x}$; g) $\frac{1-x}{1+x^3}$; h) $\ln(4+x^2)$.

Rozwiązanie

a) W rozwiązaniu wykorzystamy rozwinięcie funkcji $\frac{1}{1-x}$ w szereg Maclaurina, tj. wzór

$$\frac{1}{1-x} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{gdzie } |x| < 1.$$

Mamy

$$\frac{4x}{x+2} = 4 - \frac{8}{x+2} = 4 - 4 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{2}\right)}.$$

Korzystając teraz ze wzoru • otrzymamy

$$4-4\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}\stackrel{\bullet}{=}4-4\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n,$$

gdzie $\left|-\frac{x}{2}\right|<1$. Ostatecznie mamy

$$\frac{4x}{x+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n$$

dla $|x|<2$.

b) W rozwiązaniu wykorzystamy rozwinięcie Maclaurina funkcji $\sin x$, tj. wzór

$$\sin x\stackrel{\square}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1},\quad\text{gdzie }x\in\boldsymbol{R}.$$

Zatem

$$x\sin 3x\stackrel{\square}{=}x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}(3x)^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n}$$

dla $x\in\boldsymbol{R}$.

c) Rozkładając na ułamki proste funkcję rozważaną w przykładzie otrzymamy

$$\frac{3}{1+x-2x^2}=\frac{3}{(1-x)(1+2x)}=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x}.$$

Korzystając teraz z równości • z przykładu **a)** otrzymamy

$$\frac{2}{1+2x}=2\cdot\frac{1}{1-(-2x)}\stackrel{\bullet}{=}2\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n=2\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^nx^n,\quad\text{gdzie }|-2x|=2|x|<1.$$

Ostatecznie

$$\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-(-2)^{n+1}\right)x^n,\quad\text{gdzie }|x|<\frac{1}{2}.$$

d) W rozwiązaniu wykorzystamy rozwinięcie funkcji $\cos x$ w szereg Maclaurina, tj. wzór

$$\cos x\stackrel{*}{=}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad\text{gdzie }x\in\boldsymbol{R}.$$

Przekształcając funkcję rozważaną w zadaniu otrzymamy kolejno

$$\begin{aligned}\cos^2 x&=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\\&\stackrel{*}{=}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(2n)!}x^{2n}\\&=1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(2n)!}x^{2n},\end{aligned}$$

gdzie $x \in \boldsymbol{R}$.

e*) W rozwiązaniu wykorzystamy równość • podaną w przykładzie **a)** oraz wzór

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Stosując teraz dla tożsamości

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \stackrel{\bullet}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

gdzie $|x| < 1$, twierdzenie o całkowaniu szeregów potęgowych otrzymamy kolejno

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

gdzie $|x| < 1$.

f) W rozwiązaniu wykorzystamy rozwinięcie funkcji e^x w szereg Maclaurina, tj. wzór

$$e^x \stackrel{\triangle}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{gdzie } x \in \boldsymbol{R}.$$

Zatem

$$e^{2x} - 1 \stackrel{\triangle}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n, \quad \text{gdzie } x \in \boldsymbol{R}.$$

Ostatecznie

$$\frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} x^n, \quad \text{gdzie } x \in \boldsymbol{R}.$$

Uwaga. Zakładamy tutaj, że w punkcie $x = 0$ rozważana funkcja przyjmuje wartość równą granicy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = 2$.

g) Korzystając z podanego w przykładzie **a)** rozwinięcia funkcji $\dfrac{1}{1-x}$ w szereg Maclaurina dla $\left|-x^3\right| < 1$, tj. dla $|x| < 1$, mamy

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^3\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}.$$

Ostatecznie

$$\frac{1-x}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)} - \frac{x}{1-(-x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} - x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

gdzie

$$c_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{dla} \quad n = 3k, \\ (-1)^{k+1} & \text{dla} \quad n = 3k+1, \\ 0 & \text{dla} \quad n = 3k+2. \end{cases}$$

h) W rozwiązaniu wykorzystamy rozwinięcie funkcji $\ln(1+x)$ w szereg Maclaurina, tj wzór

$$\ln(1+x) \stackrel{\diamond}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad \text{gdzie} \quad -1 < x \leqslant 1.$$

Mamy

$$\ln\left(4+x^2\right) = \ln 4 + \ln\left(1+\frac{x^2}{4}\right) \stackrel{\diamond}{=} \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n$$

$$= \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n4^n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

gdzie

$$c_n = \begin{cases} \ln 4 & \text{dla} \quad n = 0, \\ 0 & \text{dla} \quad n = 2k-1, \\ \dfrac{(-1)^{k+1}}{k4^k} & \text{dla} \quad n = 2k. \end{cases}$$

Szereg ten jest zbieżny dla x spełniających nierówność $-1 < \dfrac{x^2}{4} \leqslant 1$, tj. dla $x \in [-2, 2]$.

• Przykład 3.5

Stosując twierdzenia o całkowaniu i/lub różniczkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumy podanych szeregów:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}$; b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)5^n}$; d*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)3^n}$.

Rozwiązanie

a) Stosując twierdzenie o całkowaniu szeregów do zbieżnego szeregu geometrycznego $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, gdzie $|x| < 1$, otrzymamy

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Z drugiej strony

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{oraz} \quad \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x), \quad \text{gdzie} \quad |x| < 1.$$

Ostatecznie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad \text{gdzie} \quad |x| < 1.$$

Przyjmując w ostatniej równości $x = -\dfrac{1}{2}$ otrzymamy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} = \ln\frac{2}{3}$.

b) Teraz stosując twierdzenie o różniczkowaniu szeregów do zbieżnego szeregu geometrycznego otrzymamy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad \text{gdzie } |x| < 1.$$

Z drugiej strony

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{gdzie } |x| < 1.$$

Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \text{gdzie } |x| < 1.$$

Przyjmując w ostatniej równości $x = \frac{1}{3}$ otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{4}.$$

Stąd mamy $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$

c*) Ze wzoru na sumę nieskończonego ciągu geometrycznego wynika tożsamość

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1} = \frac{t^2}{1-t} \quad \text{dla } |t| < 1.$$

Całkując na przedziale $[0, x]$, gdzie $|x| < 1$, obie strony powyższej tożsamości otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = -\frac{1}{2}x^2 - x - \ln(1-x).$$

Dzieląc teraz obie strony ostatniej równości przez x^2 dostaniemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = -\frac{1}{2} - \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}, \quad \text{gdzie } |x| < 1.$$

Dla $x = 0$ po prawej stronie należy zastosować przejście graniczne $x \longrightarrow 0$. Z kolei różniczkując obustronnie powyższą tożsamość otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}x^{n-1} = \frac{x^2 + 2(1-x)(x + \ln(1-x))}{(1-x)x^3}.$$

Stąd po pomnożeniu obu stron ostatniej równości przez x mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}x^n = \frac{x^2 + 2(1-x)(x + \ln(1-x))}{(1-x)x^2} \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Podstawiając w tym wzorze $x = \frac{1}{5}$ otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)5^n} = \frac{45}{4} + 50 \ln \frac{4}{5}.$$

d*) Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego zbieżnego mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^{3n} = \frac{t^3}{1-t^3}, \quad \text{gdzie } |t| < 1.$$

Całkując obustronie po odcinku $[0, x]$, gdzie $|x| < 1$, powyższą tożsamość otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = -x + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6} \ln \frac{(1-x)^2}{x^2+x+1}.$$

Dzieląc obie strony ostatniej równości przez x otrzymamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3n+1} = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}x} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6x} \ln \frac{(1-x)^2}{x^2+x+1} \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Dla $x = 0$ po prawej stronie należy zastosować przejście graniczne $x \to 0$. Aby teraz wyznaczyć sumę rozważanego szeregu należy w otrzymanej równości podstawić $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Zadania

○ Zadanie 3.1

Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną podanych szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n$; c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$; d*) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)}}{n+1}$.

○ Zadanie 3.2

Wykazać zbieżność odpowiedniego szeregu i następnie na podstawie warunku koniecznego zbieżności szeregów uzasadnić podane równości:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7^n}{n^5} = \infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$; d*) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n)(4n!)}{(5n)!(2n)!} = 0$.

○ Zadanie 3.3

Wyznaczyć przedziały zbieżności podanych szeregów potęgowych:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^3}$; d*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$.

○ Zadanie 3.4

Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i określić przedziały ich zbieżności:

a) $\frac{2}{1-3x}$; b) $\cos\frac{x}{2}$; c) xe^{-2x}; d) $\frac{x}{9+x^2}$; e) $\operatorname{sh} x$; f*) $\sin^4 x$.

○ **Zadanie 3.5**
Stosując twierdzenia o różniczkowaniu i/lub całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumy podanych szeregów:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}$; c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$;

d*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)2^n}$; e*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^{2n}}$; f*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}$.

Odpowiedzi i wskazówki

3.1 a); **b)** zbieżny bezwzględnie; **c)**; **d*)** zbieżny warunkowo.

3.3 a) $[-2, 2)$; **b)** $(1, 3)$; **c)** $[-4, -2]$; **d*)** $(-e, e)$.

3.4 a) $2 + 2 \cdot 3x + 2 \cdot 3^2x^2 + \ldots + 2 \cdot 3^n x^n + \ldots$, $R = \frac{1}{3}$;

b) $1 - \frac{x^2}{2!2^2} + \frac{x^4}{4!2^4} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!2^{2n}} + \ldots$, $R = \infty$;

c) $x - 2x^2 + \frac{2^2}{2!}x^3 + \ldots + (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^{n+1} + \ldots$, $R = \infty$;

d) $\frac{x}{3^2} - \frac{x^3}{3^4} + \frac{x^5}{3^6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2(n+1)}} + \ldots$, $R = 3$;

e) $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$, $R = \infty$;

f*) Wskazówka. Wykorzystać tożsamość $\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$.
$\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{16^n - 4 \cdot 4^n}{8 \cdot (2n)!} x^{2n}$, $R = \infty$.

3.5 a) $2 \ln 2$; **b)** $\frac{32}{27}$; **c)** $\frac{2}{3}$; **d*)** $6 - 8\ln 2$; **e*)** $\frac{325}{6912}$; **f*)** $\ln 3$.

3

FUNKCJE DWÓCH I TRZECH ZMIENNYCH

Czwarty tydzień

Zbiory na płaszczyźnie i w przestrzeni (3.1). Funkcje dwóch i trzech zmiennych (3.2). Granice funkcji w punkcie (3.3). Funkcje ciągłe (3.4).

Przykłady

• **Przykład 4.1**

Zbadać, czy podane zbiory są ograniczone, otwarte, domknięte:

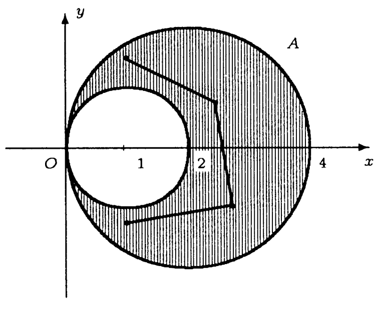
a) $A = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : 2x \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4x\}$;

b) $B = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 6 - 3x - 2y,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

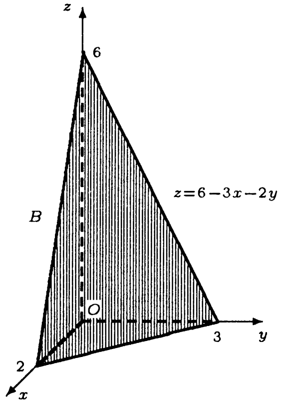
Zbadać, czy zbiory te są obszarami.

Rozwiązanie

a) Zbiór rozważany w tym przykładzie jest ograniczony dwoma okręgami $(x-1)^2 + y^2 = 1$ i $(x-2)^2+y^2 = 2^2$ (zobacz rysunek). Zbiór A jest ograniczony, bo jest zawarty np. w kole o środku w początku układu i promieniu 5. Zbiór ten nie jest otwarty, bo nie ma otoczenia np. punktu $(0,0)$, całkowicie w nim zawartego. Zbiór A jest domknięty, bo zawiera swój brzeg, tj. dwa ograniczające go okręgi. Zbiór jest obszarem domkniętym na płaszczyźnie, bo każde dwa punkty z jego wnętrza można połączyć łamaną całkowicie w nim zawartą.



b) Zbiór B jest ostrosłupem (zobacz rysunek). Zbiór ten jest ograniczony, bo jest zawarty np. w kuli o środku w $(0,0,0)$ i promieniu 6. Natomiast zbiór ten nie jest otwarty, bo np. punkt $(0,0,0)$ nie ma otoczenia całkowicie zawartego w nim. Jednakże zbiór B jest domknięty, bo zawiera swój brzeg, tj. ściany ostrosłupa. Zbiór B jest spójny, bo jest wypukły. Z rozważań tych wynika ostatecznie, że zbiór ten jest obszarem domkniętym w $\boldsymbol{R}^3$.



• Przykład 4.2

Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne podanych funkcji:

a) $f(x,y) = \sqrt{x \sin y}$; b) $g(x,y) = \arcsin \sqrt{y - \sqrt{x}}$.

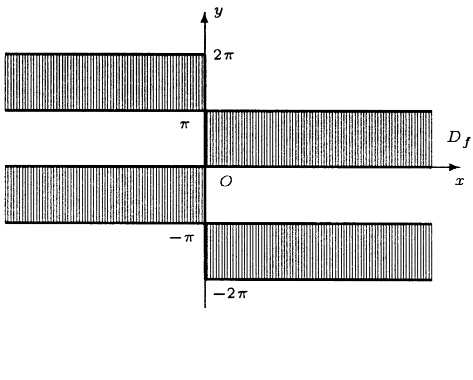
Rozwiązanie

a) Dziedzina naturalna funkcji f jest zbiorem par $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ spełniających nierówność: $x \sin y \geqslant 0$. Mamy

$$x \sin y \geqslant 0 \iff \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \sin y \geqslant 0 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x < 0, \\ \sin y \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geqslant 0, \\ 2k\pi \leqslant y \leqslant \pi + 2k\pi \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x < 0, \\ -\pi + 2k\pi \leqslant y \leqslant 2k\pi, \end{cases} \quad \text{gdzie } k \in \boldsymbol{Z}.$$

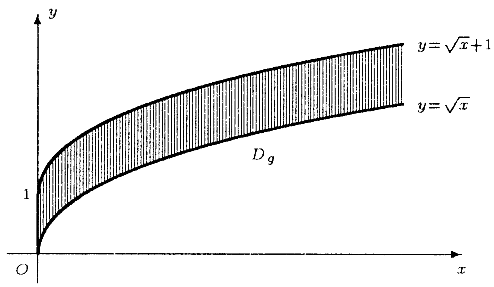
Dziedzina naturalna funkcji f jest zaznaczona na rysunku.



b) Mamy

$$D_g = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 \leqslant y - \sqrt{x} \leqslant 1,\ \ x \geqslant 0\right\} = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 1 + \sqrt{x},\ \ x \geqslant 0\right\}$$

Na rysunku zaznaczono zbiór D_g.



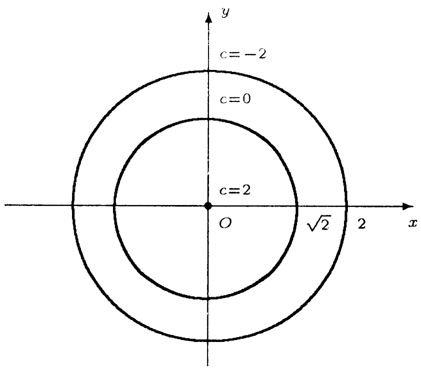
• Przykład 4.3

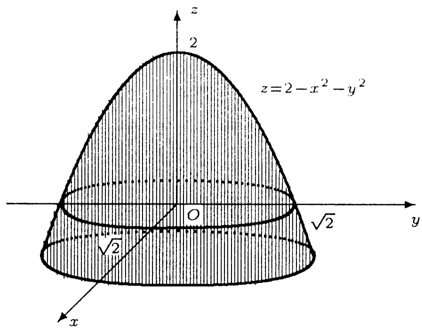
Znaleźć poziomice wykresów podanych funkcji i na tej podstawie naszkicować wykresy tych funkcji:

a) $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$; b) $f(x,y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$; c) $f(x,y) = -\sqrt{9 - y^2}$.

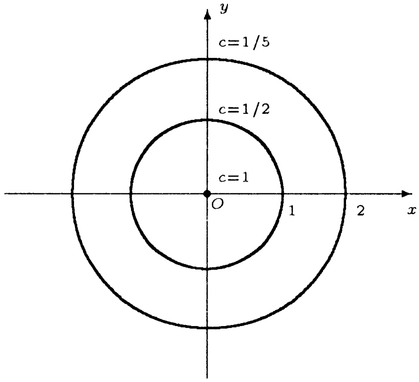
Rozwiązanie

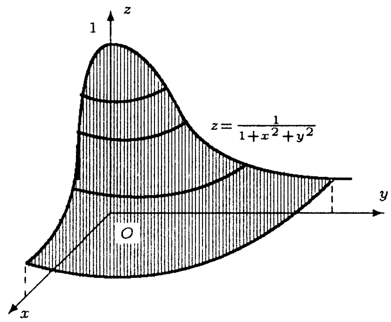
a) Wiadomo, że wykresy funkcji postaci $z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ są powierzchniami obrotowymi powstałymi z obrotu wykresu funkcji $z = f(|x|)$, $y = 0$, wokół osi Oz. Wykres funkcji rozważanej w zadaniu jest powierzchnią paraboloidy powstałej z obrotu wykresu paraboli $z = 2 - x^2$, $y = 0$, wokół osi Oz. Poziomicami wykresu tej funkcji na poziomie c są zbiory $\left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : 2 - \left(x^2 + y^2\right) = c\right\}$, gdzie $c \leqslant 2$. Poziomice te są okręgami o środku w początku układu i promieniach $r = \sqrt{2 - c}$, $c \leqslant 2$. Na rysunkach widoczne są poziomice odpowiadające poziomom $c = 2$, $c = 0$, $c = -2$ oraz wykres funkcji.





b) Także w tym przykładzie wykres funkcji jest powierzchnią obrotową. Powierzchnia ta powstała z obrotu wykresu funkcji $z = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y = 0$, wokół osi Oz. Poziomicami wykresu badanej funkcji na wysokości c są okręgi o środku w początku układu i promieniach $r = \sqrt{\dfrac{1}{c} - 1}$, gdzie $0 < c \leqslant 1$. Na rysunkach widoczne są poziomice odpowiadające poziomom $c = 1$, $c = \dfrac{1}{2}$, $c = \dfrac{1}{5}$ oraz fragment wykresu tej funkcji dla $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.





c) Wykres funkcji postaci $f(x,y) = h(y)$ jest powierzchnią walcową o tworzących równoległych do osi Ox. Dziedziną funkcji $f(x,y) = -\sqrt{9-y^2}$ jest zbiór

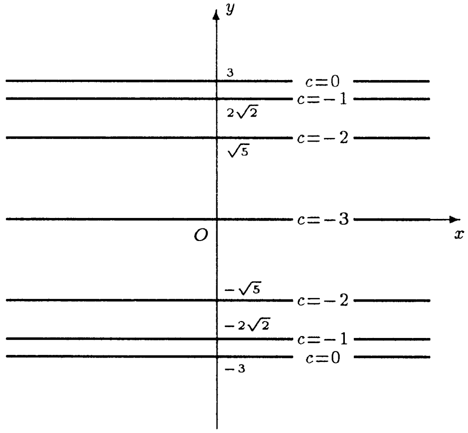
$$D_f = \{(x,y) \in \boldsymbol{R} : -3 \leqslant y \leqslant 3\}.$$

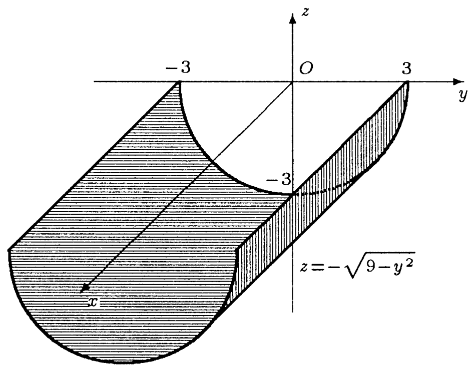
Natomiast zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $[-3,0]$. Zatem jej poziomice możemy wyznaczyć tylko na poziomie $c \in [-3,0]$. Z definicji poziomicami wykresu funkcji f na wysokości c są zbiory

$$\{(x,y) \in D_f : f(x,y) = c\}.$$

Zatem w naszym przypadku mamy $-\sqrt{9-y^2} = c$, gdzie $-3 \leqslant c \leqslant 0$. Stąd

$$y = \sqrt{9-c^2} \quad \text{lub} \quad y = -\sqrt{9-c^2}.$$





Są to równania dwóch prostych równoległych do osi Ox i symetrycznie względem niej położonych Na pierwszym rysunku przedstawiono poziomice odpowiadające wysokościom $c = -3$, $c = -2$, $c = -1$ oraz $c = 0$, a na drugim wykres funkcji.

- **Przykład 4.4**

Zbadać, czy podane ciągi punktów na płaszczyźnie lub w przestrzeni są zbieżne (dla ciągu zbieżnego wskazać jego granicę):

a) $(x_n, y_n) = \left(\arcsin \frac{n^2-1}{n^2+1}, \sin \frac{\pi\left(n^2+1\right)}{2n}\right)$; b) $(x_n, y_n, z_n) = \left(\sqrt[n]{n}, \frac{1}{n}, \ln \frac{n}{n+1}\right)$.

Rozwiązanie

a) W rozważanym przykładzie mamy

$$x_n = \arcsin \frac{n^2-1}{n^2+1}, \qquad y_n = \sin \frac{\pi\left(n^2+1\right)}{2n}.$$

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \arcsin \frac{n^2-1}{n^2+1} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{\pi\left(n^2+1\right)}{2n} \quad \text{nie istnieje.}$$

Tak więc dany w przykładzie ciąg punktów na płaszczyźnie jest rozbieżny.

b) Dla rozważanego tu ciągu mamy

$$x_n = \sqrt[n]{n}, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad z_n = \ln \frac{n}{n+1}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n}{n+1} = 0,$$

więc ciąg punktów w przestrzeni dany w przykładzie jest zbieżny i jego granicą jest punkt $(1, 0, 0)$.

- **Przykład 4.5**

Obliczyć, jeżeli istnieją, granice podanych funkcji:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$; b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^2}{x^2+y^2}$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$; d*) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+2y}$.

Rozwiązanie

a) Pokażemy, że granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$ nie istnieje. W tym celu wystarczy wskazać dwa ciągi $\left(x_n', y_n'\right)$, $\left(x_n'', y_n''\right)$ zbieżne do punktu $(0,0)$ takie, że wartości funkcji $f(x,y) = \frac{x}{x+y}$ odpowiadające wyrazom tych ciągów są zbieżne do różnych granic. Niech $\left(x_n', y_n'\right) =$

$\left(0, \frac{1}{n}\right)$ oraz niech $\left(x_n'', y_n''\right) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ dla $n \in \boldsymbol{N}$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n'}{x_n' + y_n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{0 + \frac{1}{n}} = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n''}{x_n'' + y_n''} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 0} = 1.$$

Otrzymaliśmy różne granice, zatem granica funkcji rozważana w zadaniu nie istnieje.

b) Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach pokażemy, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Dla każdego punktu $(x, y) \neq (0, 0)$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = x^2 \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leqslant x^2 \cdot 1 = x^2.$$

Ponieważ dla funkcji ograniczających mamy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0,$$

więc także

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

c) Wyznaczenie szukanej granicy sprowadzimy do znalezienia granicy funkcji jednej zmiennej. Podstawiając $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ mamy $(x, y) \longrightarrow (0, 0) \iff u \longrightarrow \infty$. Zatem rozważana granica przyjmuje równoważną postać

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^u}.$$

Teraz stosując do otrzymanej nieoznaczoności $\frac{\infty}{\infty}$ regułę de L'Hospitala otrzymamy

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^u} \overset{H}{=} \lim_{u\to\infty} \frac{1}{e^u} = 0.$$

Zatem szukana granica jest także równa 0.

d) Pokażemy, że badana granica nie istnieje. W tym celu rozważmy ciągi

$$\left(x_n', y_n'\right) = \left(0, \frac{1}{n}\right), \quad \left(x_n'', y_n''\right) = \left(\frac{1}{n}, \frac{3}{n(1-2n)}\right).$$

Każdy z nich jest zbieżny do punktu $(0, 0)$, gdy $n \to \infty$. Jednakże wartości funkcji $f(x, y) = \frac{xy}{3x^2 + 2y}$ dla pierwszego ciągu są zbieżne do 0, a dla drugiego do 1. Rzeczywiście mamy odpowiednio

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n'y_n'}{3\left(x_n'\right)^2 + 2y_n'} = \lim_{n\to\infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{n}}{3 \cdot 0^2 + \frac{2}{n}} = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n''y_n''}{3\left(x_n''\right)^2 + 2y_n''} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{3}{n(1-2n)}}{3\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{n(1-2n)}} = 1.$$

Oznacza to, że badana granica nie istnieje.

Uwaga. Można pokazać, że jeżeli $(x,y) \longrightarrow (0,0)$ oraz punkt (x,y) należy do I ćwiartki układu współrzędnych, to $\dfrac{xy}{3x^2+2y} \longrightarrow 0$.

• Przykład 4.6

Znaleźć zbiory punktów ciągłości podanych funkcji:

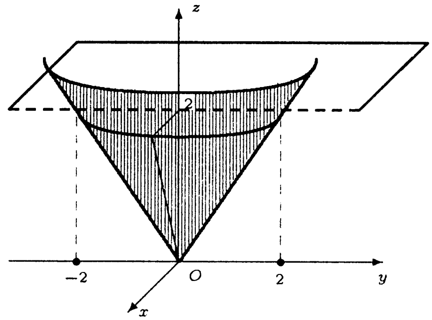
a) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{dla} \quad x \geqslant 0, \\ 2 & \text{dla} \quad x < 0; \end{cases}$ b) $f(x,y,z) = \dfrac{xy+1}{x^2+z^2-1}$.

Rozwiązanie

a) Funkcja f jest ciągła na półpłaszczyznach otwartych

$$\pi_- = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x < 0\right\},$$
$$\pi_+ = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x > 0\right\},$$

gdyż jest tam określona odpowiednio przez funkcje ciągłe $g(x,y) \equiv 2$, $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Ciągłość funkcji f na prostej $x = 0$ zbadamy z definicji. Badania te przeprowadzimy najpierw w punktach $(0,-2)$, $(0,2)$ tej prostej. Mamy więc $f(0,-2) = 2$ oraz



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,-2)\\(x,y)\in\pi_-}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,-2)\\(x,y)\in\pi_-}} 2 = 2,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,-2)\\(x,y)\in\pi_+}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,-2)\\(x,y)\in\pi_+}} \sqrt{x^2+y^2} = 2.$$

Oznacza to, że funkcja f jest ciągła w punkcie $(0,-2)$. Podobnie można uzasadnić, że funkcja f jest ciągła w punkcie $(0,2)$. Pokażemy, że są to jedyne punkty ciągłości funkcji f na prostej $x = 0$. Rzeczywiście, niech $(0,y_0)$ będzie dowolnym (różnym od $(0,-2)$ i $(0,2)$) punktem tej prostej. Wtedy

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\(x,y)\in\pi_-}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\(x,y)\in\pi_-}} 2 = 2$$

oraz

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\(x,y)\in\pi_+}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\(x,y)\in\pi_+}} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{y_0^2} = |y_0| \neq 2.$$

Otrzymaliśmy różne granice, zatem funkcja f nie jest ciągła w punkcie $(0,y_0)$. Wykres funkcji f przedstawiono na rysunku powyżej.

b) Dziedziną funkcji $f(x,y,z) = \dfrac{xy+1}{x^2+z^2-1}$ jest przestrzeń $\mathbf{R}^3$ bez walca $x^2+z^2 = 1$. Funkcja f jest ciągła w swojej dziedzinie. Wynika to z twierdzenia o ciągłości ilorazu funkcji ciągłych. Funkcje w liczniku i mianowniku są ciągłe na $\mathbf{R}^3$, gdyż są wielomianami zmiennych x, y, z.

Zadania

○ Zadanie 4.1

Spośród podanych zbiorów na płaszczyźnie lub w przestrzeni wskazać te, które są ograniczone, otwarte, domknięte. Które z tych zbiorów są obszarami?

a) $A = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : \ x^2 < y < 2x^2\}$;

b) $B = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 : \ xyz = 0\}$;

c) $C = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$.

○ Zadanie 4.2

Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne podanych funkcji:

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$; b) $g(x, y) = \ln \dfrac{x^2 + y^2 - 4}{9 - x^2 - y^2}$;

c) $h(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y - 1} + \sqrt{z - 2}$; d) $k(x, y, z) = \arcsin\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2\right)$.

○ Zadanie 4.3

Znaleźć poziomice wykresów podanych funkcji i na tej podstawie naszkicować te wykresy:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; b) $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

c) $h(x, y) = \sin y$; d) $p(x, y) = e^{x-y}$.

○ Zadanie 4.4

Zbadać, czy podane ciągi punktów na płaszczyźnie lub w przestrzeni są zbieżne (dla ciągów zbieżnych wskazać ich granice):

a) $(x_n, y_n) = \left((-1)^n, \sin\dfrac{\pi}{n}\right)$; b) $(x_n, y_n, z_n) = \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}, \sqrt[n]{2}, 3\right)$.

○ Zadanie 4.5

Obliczyć, jeżeli istnieją, granice podanych funkcji:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2 + y^2\right) \sin\frac{1}{xy}$; b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \cos\left(x^2 + y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$;

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x + y - 2}{x^2 + y^2 - 2}$; d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,0)} \frac{\sin^2 x}{y^2}$;

e*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y \ln\left(x^2 + y^2\right)$; f*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$;

g*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y}$; h*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^3}$.

○ Zadanie 4.6

Znaleźć zbiory punktów ciągłości podanych funkcji:

a) $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2} & \text{dla} \quad x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0 & \text{dla} \quad x^2+y^2>1;\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\sin x & \text{dla} \quad y\geqslant 0 \quad \text{oraz} \quad x\in \boldsymbol{R},\\ 1 & \text{dla} \quad y<0 \quad \text{oraz} \quad x\in \boldsymbol{R}.\end{cases}$

Odpowiedzi i wskazówki

?? **a)** nieograniczony, otwarty; **b)** nieograniczony, domknięty; **c)** ograniczony, otwarty, obszar.

?? **a)** $D_f=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 : x^2+y^2>25\right\}$; **b)** $D_g=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 : 4<x^2+y^2<9\right\}$; **c)** $D_h=\left\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 : x\geqslant 0, y\geqslant 1, z\geqslant 2\right\}$; **d)** $D_k=\left\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3 : 1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 3\right\}$.

?? **a)** $D_f=\boldsymbol{R}^2$, $\left\{(x,y)\in D_f : x^2+y^2=h^2\right\}$; **b)** $D_g=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 4\right\}$, $\left\{(x,y)\in D_g : x^2+y^2=4-h^2\right\}$; **c)** $D_h=\boldsymbol{R}^2$, $\{(x,y)\in D_h : \sin y=h\}$; **d)** $D_p=\boldsymbol{R}^2$, $\{(x,y)\in D_p : y=x-\ln h\}$.

?? **a)** rozbieżny; **b)** $(1,1,3)$.

?? **a)** 0; **b)** $\frac{1}{2}$; **c)** nie istnieje; **d)** nie istnieje; **e*)** 0. Wskazówka. Zauważyć, że dla $x>0$, $y>0$, $x^2+y^2<1$ zachodzą nierówności $y\ln\left(0+y^2\right)<y\ln\left(x^2+y^2\right)<0$; **f*)** nie istnieje; **g*)** nie istnieje. Wskazówka. Rozważyć ciągi $\left(x_n', y_n'\right)=\left(0,\frac{1}{n}\right)$, $\left(x_n'', y_n''\right)=\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n}, -\frac{1}{n}\right)$; **h*)** nie istnieje. Wskazówka. Rozważyć ciągi $\left(x_n', y_n'\right)=\left(\frac{1}{n},0\right)$, $\left(x_n'', y_n''\right)=\left(\frac{1}{n}, -\frac{\sqrt[3]{n+1}}{n}\right)$.

?? **a)** $\boldsymbol{R}^2$; **b)** $\boldsymbol{R}^2\setminus\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 : y=0,\ x\neq \frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in \boldsymbol{Z}\right\}$.

4

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY FUNKCJI DWÓCH I TRZECH ZMIENNYCH

Piąty tydzień

Pochodne cząstkowe funkcji (4.1).

Przykłady

- **Przykład 5.1**

Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji:

a) $f(x,y) = e^{x^2 \sin y}$; b) $f(x,y) = \arccos \dfrac{y}{x}$; c) $f(x,y,z) = x^y - z^x$.

Rozwiązanie

a) Dla $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2 \sin y}\right) = e^{x^2 \sin y} \cdot 2x \sin y$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2 \sin y}\right) = e^{x^2 \sin y} \cdot x^2 \cos y.$$

b) W punktach (x,y), których współrzędne spełniają nierówności $x \neq 0$, $-1 < \dfrac{y}{x} < 1$, mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{|x|\sqrt{x^2 - y^2}}$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-|x|}{x\sqrt{x^2-y^2}} = -\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

c) W punktach (x, y, z), których współrzędne spełniają nierówności $x > 0$, $z > 0$, mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^y - e^{x\ln z}\right) = yx^{y-1} - \ln z \cdot e^{x\ln z} = yx^{y-1} - z^x \ln z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y\ln x} - z^x\right) = \ln x \cdot e^{y\ln x} - 0 = \ln x \cdot x^y$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(x^y - z^x\right) = 0 - xz^{x-1} = -xz^{x-1}.$$

• Przykład 5.2

Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}, \quad (x_0, y_0) = (0,0);$

b) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y}{x^2+y^2+z^2} & \text{dla } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y,z) = (0,0,0), \end{cases} \quad (x_0, y_0, z_0) = (0,0,0).$

Rozwiązanie

a) Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

W podobny sposób można pokazać, że $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$.

b) Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0, 0) - f(0,0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y, 0) - f(0,0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{1}{\Delta y} - 0}{\Delta y} = \infty,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(0, 0, \Delta z) - f(0,0,0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta z} = 0.$$

Zauważmy, że druga z obliczonych pochodnych cząstkowych jest niewłaściwa.

• Przykład 5.3

Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu podanych funkcji i sprawdzić, czy pochodne cząstkowe mieszane są równe:

a) $f(x,y) = xy + \dfrac{x^2}{y^3}$; b) $f(x,y,z) = e^{3x+4y}\cos 5z$.

Rozwiązanie

a) W punktach $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$, gdzie $y \neq 0$, mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy + \frac{x^2}{y^3}\right) = y + \frac{2x}{y^3}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy + \frac{x^2}{y^3}\right) = x - \frac{3x^2}{y^4}.$$

Obliczając dalej pochodne cząstkowe otrzymamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y + \frac{2x}{y^3}\right) = 0 + \frac{2}{y^3} = \frac{2}{y^3}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{3x^2}{y^4}\right) = 1 - \frac{6x}{y^4}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y + \frac{2x}{y^3}\right) = 1 - \frac{6x}{y^4}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{3x^2}{y^4}\right) = 0 + \frac{12x^2}{y^5} = 12\frac{x^2}{y^5}.
\end{aligned}$$

Pochodne cząstkowe mieszane są sobie równe.

b) W punktach $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3$ mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right) = 3e^{3x}e^{4y}\cos 5z, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right) = 4e^{3x}e^{4y}\cos 5z,
\end{aligned}$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right) = -5e^{3x}e^{4y}\sin 5z.$$

Obliczając dalej pochodne cząstkowe otrzymamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right) = 9e^{3x}e^{4y}\cos 5z, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(4e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right) = 12e^{3x}e^{4y}\cos 5z, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-5e^{3x}e^{4y}\sin 5z\right) = -15e^{3x}e^{4y}\sin 5z, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right) = 12e^{3x}e^{4y}\cos 5z, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(4e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right) = 16e^{3x}e^{4y}\cos 5z, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-5e^{3x}e^{4y}\sin 5z\right) = -20e^{3x}e^{4y}\sin 5z,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(3e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right) = -15e^{3x}e^{4y}\sin 5z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(4e^{3x}e^{4y}\cos 5z\right) = -20e^{3x}e^{4y}\sin 5z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-5e^{3x}e^{4y}\sin 5z\right) = -25e^{3x}e^{4y}\cos 5z.$$

Odpowiadające sobie pochodne mieszane są równe.

• Przykład 5.4

Zbadać, czy równość $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ jest spełniona dla funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Rozwiązanie

Ponieważ funkcja f jest określona w punkcie $(0,0)$ osobnym wzorem, więc pochodne cząstkowe mieszane musimy obliczyć z definicji. Mamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) \overset{def}{=\!=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) \overset{def}{=\!=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y}.$$

Potrzebne nam będą zatem pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0), \text{ gdzie } \Delta x \neq 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0); \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,\Delta y), \text{ gdzie } \Delta y \neq 0 \text{ oraz } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0)$ oraz $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y)$ dla $\Delta x, \Delta y \neq 0$ można obliczyć bezpośrednio korzystając z reguł różniczkowania funkcji. Mamy więc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{(\Delta x, 0)} = \frac{\left(x^3-3xy^2\right)\left(x^2+y^2\right) - 2xy^2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Bigg|_{(\Delta x, 0)}$$

$$= \frac{\left((\Delta x)^3 - 0\right)\left[(\Delta x)^2 + 0\right] - 0}{\left((\Delta x)^2 + 0\right)^2} = \Delta x.$$

Podobnie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{(0, \Delta y)} = \frac{\left(3x^2y-y^3\right)\left(x^2+y^2\right) - 2x^2y\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Bigg|_{(0, \Delta y)}$$

$$= \frac{\left(0-(\Delta y)^3\right)\left[0+(\Delta y)^2\right] - 0}{\left(0+(\Delta y)^2\right)^2} = -\Delta y.$$

Natomiast pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ musimy obliczyć korzystając z definicji. Mamy zatem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0.$$

Wracamy teraz do pochodnych cząstkowych mieszanych:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1.$$

Zatem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

• Przykład 5.5

Obliczyć wskazane pochodne cząstkowe dla podanych funkcji:

a) $\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^4}$, $f(x,y) = xe^{-y}$; b) $\frac{\partial^5 f}{\partial z^2 \partial x \partial y^2}$, $f(x,y,z) = \ln\left(x^2 + 2y - z\right)$.

Rozwiązanie

a) Mamy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^5}{\partial x \partial y^4}\left(xe^{-y}\right) &= \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{-y}\right)\right) = \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3}\left(-xe^{-y}\right) \\
&= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-xe^{-y}\right)\right) = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\left(xe^{-y}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{-y}\right)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(-xe^{-y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-xe^{-y}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{-y}\right) = e^{-y}.
\end{aligned}$$

b) Kolejno mamy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(x^2 + 2y - z\right)\right) = \frac{2}{x^2 + 2y - z},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{x^2 + 2y - z}\right) = \frac{-4}{\left(x^2 + 2y - z\right)^2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-4}{\left(x^2 + 2y - z\right)^2}\right) = \frac{16x}{\left(x^2 + 2y - z\right)^3},$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{16x}{(x^2+2y-z)^3}\right) = \frac{48x}{(x^2+2y-z)^4},$$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial z^2 \partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{48x}{(x^2+2y-z)^4}\right) = \frac{192x}{(x^2+2y-z)^5}.$$

Zadania

O Zadanie 5.1

Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji:

a) $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{1-xy}{x+y}$; b) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$;

c) $f(x,y) = e^{\sin \frac{y}{x}}$; d) $f(x,y,z) = \sin(x\cos(y\sin z))$.

O Zadanie 5.2

Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{dla } xy = 0, \\ 1 & \text{dla } xy \neq 0, \end{cases}$ $(x_0, y_0) = (0,0)$;

b) $f(x,y,z) = \sqrt[5]{xy(z-1)}$, $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,1)$;

c*) $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{dla } y = 0, \\ y^2 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{w pozostałych punktach}, \end{cases}$ $(x_0, y_0) = (0,0)$.

O Zadanie 5.3

Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu podanych funkcji i sprawdzić, czy pochodne cząstkowe mieszane są równe:

a) $f(x,y) = \sin\left(x^2+y^2\right)$; b) $f(x,y) = xe^{xy}$;

c) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; d) $f(x,y,z) = \ln\left(x^2+y^4+z^6+1\right)$.

O Zadanie 5.4

Zbadać, czy równość $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ jest prawdziwa dla funkcji:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ b) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^6 - 8y^3}$.

O Zadanie 5.5

Obliczyć wskazane pochodne cząstkowe dla podanych funkcji:

a) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$, $f(x,y) = \sin xy$;   b) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x \partial y}$, $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$;

c) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 y^3}{z}$;   d) $\dfrac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}$, $f(x,y,z) = e^{xy+z}$.

Odpowiedzi i wskazówki

5.1 a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{1+y^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{1+x^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$; **b)** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$;

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} e^{\sin\frac{y}{x}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} e^{\sin\frac{y}{x}}$;

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(x\cos(y\sin z)\right)\cdot\cos(y\sin z)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\cos\left(x\cos(y\sin z)\right)\cdot x\sin(y\sin z)\cdot\sin z$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -\cos\left(x\cos(y\sin z)\right)\cdot x\sin(y\sin z)\cdot y\cos z$.

5.2 a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, **b)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0,1) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0,1) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 0$, **c*)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$.

5.3 a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4xy\sin\left(x^2+y^2\right)$; **b)** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = xe^{xy}(2+xy)$;

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \dfrac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \dfrac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{-8xy^3}{(x^2+y^4+z^6+1)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \dfrac{-12xz^5}{(x^2+y^4+z^6+1)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \dfrac{-24y^3z^5}{(x^2+y^4+z^6+1)^2}$.

5.4 a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$; **b)** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ nie istnieje.

5.5 a) $-x(2\sin xy + xy\cos xy)$; **b)** $\dfrac{-12(3x+y)}{(x-y)^5}$; **c)** $-6x\left(\dfrac{y}{z}\right)^2$; **d)** $xe^{xy+z}(2+xy)$.

Szósty tydzień

Różniczka funkcji (4.2). Pochodne cząstkowe funkcji złożonych (4.3).

Przykłady

• Przykład* 6.1

Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2, \quad (x_0, y_0) = (1, -2)$;

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad (x_0, y_0) = (0,0).$

Rozwiązanie

W rozwiązaniach wykorzystamy definicję: funkcja f jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0) wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \overset{\bullet}{=} 0.$$

a) Dla funkcji $f(x,y) = x^2 - y^2$ i punktu $(x_0, y_0) = (1, -2)$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - y^2\right)\Big|_{(1,-2)} = 2x|_{(1,-2)} = 2$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - y^2\right)\Big|_{(1,-2)} = -2y|_{(1,-2)} = 4.$$

Sprawdzimy teraz, czy zachodzi równość •. Mamy

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\left[(1+\Delta x)^2 - (-2+\Delta y)^2\right] - \left[1^2 - (-2)^2\right] - 2\Delta x - 4\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - 2(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \left[\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right] - \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{2(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.$$

Obie te granice są równe 0. Pierwsza równość jest oczywista, a drugą udowodnimy korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach. Mamy

$$0 \leqslant \frac{(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \leqslant \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Funkcje ograniczające mają w punkcie $(0,0)$ granice równe 0, zatem

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0.$$

Wracając teraz do poprzedniej granicy widzimy, że jest ona równa 0, co oznacza, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $(1,-2)$.

b) Dla sprawdzenia, czy równość • jest prawdziwa dla funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{i punktu } (x_0,y_0) = (0,0),$$

konieczne jest wcześniejsze obliczenie pochodnych cząstkowych $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Ponieważ funkcja f jest zdefiniowana dwoma wzorami, więc te pochodne cząstkowe musimy obliczyć z definicji. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \overset{def}{=} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \overset{def}{=} \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0.$$

Przechodzimy teraz do sprawdzania równości • dla badanej funkcji we wskazanym punkcie. Mamy

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{(\Delta x)(\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{(\Delta x)(\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

Pokażemy, że ostatnia granica nie jest równa 0. Niech $(\Delta x_n, \Delta y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ dla $n \in \boldsymbol{N}$. Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} (\Delta x_n, \Delta y_n) = (0,0)$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\Delta x_n)(\Delta y_n)}{(\Delta x_n)^2+(\Delta y_n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Zatem badana funkcja nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

• Przykład 6.2

Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

a) $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$, $(x_0,y_0,z_0) = (\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 2)$;

b) $z = y\ln(2+x^2y-y^2)$, $(x_0,y_0,z_0) = (2,1,z_0)$.

Rozwiązanie

Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = f(x,y)$ w punkcie (x_0, y_0, z_0), należącym do tego wykresu, ma postać

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

a) Dla funkcji $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ i punktu $(x_0, y_0, z_0) = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 2\right)$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{9 - x^2 - y^2}\right)\Big|_{(\sqrt{2}, -\sqrt{3})} = \frac{-2x}{2\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\Bigg|_{(\sqrt{2}, -\sqrt{3})} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{9 - x^2 - y^2}\right)\Big|_{(\sqrt{2}, -\sqrt{3})} = \frac{-2y}{2\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\Bigg|_{(\sqrt{2}, -\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Równanie płaszczyzny stycznej ma zatem postać

$$z - 2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y + \sqrt{3}\right),$$

czyli $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y + 2z - 9 = 0$.

b) Dla funkcji $f(x,y) = y\ln\left(2 + x^2y - y^2\right)$ mamy $z_0 = f(2,1) = \ln 5$. Ponadto mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{2y^2x}{2 + x^2y - y^2}\Bigg|_{(2,1)} = \frac{4}{5},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \ln\left(2 + x^2y - y^2\right) - \frac{y\left(x^2 - 2y\right)}{2 + x^2y - y^2}\Bigg|_{(2,1)} = \ln 5 - \frac{2}{5}.$$

Równanie płaszczyzny stycznej ma zatem postać

$$z - \ln 5 = \frac{4}{5}(x - 2) + \left(\ln 5 - \frac{2}{5}\right)(y - 1),$$

stąd otrzymamy

$$z = \frac{4}{5}x + \left(\ln 5 - \frac{2}{5}\right)y - \frac{6}{5}.$$

• Przykład 6.3

Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

a) $\dfrac{\operatorname{arctg} 0.9}{\sqrt{4.02}}$; b) $\dfrac{0.98^{1.01}}{1.01^{2.01}}$.

Rozwiązanie

a) W zadaniu wykorzystamy wzór przybliżony

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Przyjmujemy

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{y}},\ (x_0,y_0)=(1,4) \text{ oraz } \Delta x=-0.1, \Delta y=0.02.$$

Stąd $f(1,4)=0.125\pi$ oraz

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{y}},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,4)=0.125,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\operatorname{arctg} x}{-2y\sqrt{y}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,4)=-0.015625\pi.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{arctg} 0.9}{\sqrt{4.02}} &= f(0.9,4.02)\\ &\approx 0.125\pi+0.125\cdot(-0.1)+0.015625\pi\cdot 0.02=0.1253125\pi-0.0125\\ &\approx 0.381181.\end{aligned}$$

Dokładna wartość tego wyrażenia jest równa $0.365495\ldots$.

b) W zadaniu wykorzystamy wzór przybliżony

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)\approx$$
$$f(x_0,y_0,z_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\Delta z.$$

Przyjmujemy

$$f(x,y,z)=\frac{x^y}{y^z},\ (x_0,y_0,z_0)=(1,1,2) \text{ oraz } \Delta x=-0.02, \Delta y=0.01, \Delta z=0.01.$$

Stąd $f(1,1,2)=1$ oraz

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{yx^{y-1}}{y^z},\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,2)=1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^y\ln x\cdot y^z-zy^{z-1}\cdot x^y}{(y^z)^2},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,2)=-2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{x^y\cdot(-\ln y)}{y^z},\qquad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,2)=0.$$

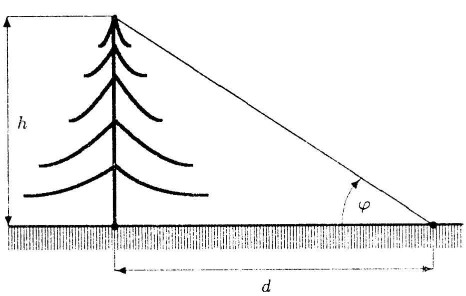
Zatem

$$\frac{0.98^{1.01}}{1.01^{2.01}}=f(0.98,1.01,2.01)\approx 1+1\cdot(-0.02)-2\cdot(0.01)+0\cdot(0.01)=0.96.$$

Dokładna wartość tego wyrażenia jest równa $0.960400\ldots$.

• Przykład 6.4

a) Kąt φ widzenia drzewa (zobacz rysunek) zmierzony z dokładnością $\Delta_\varphi=0.01\,[\text{rad}]$ jest równy $\frac{\pi}{4}$, a odległość d miejsca pomiaru od pnia drzewa zmierzona z dokładnością $\Delta_d=0.1\,[\text{m}]$ jest równa $30.00\,[\text{m}]$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć wysokość tego drzewa?



b) Boki prostokąta wynoszą $a = 10$ cm i $b = 24$ cm. Jak zmieni się w przybliżeniu przekątna p tego prostokąta, jeśli bok a zwiększy się o 4 mm, a bok b zmniejszy się o 1 mm?

Rozwiązanie

a) Wysokość drzewa wyraża się wzorem

$$h(\varphi, d) = d \operatorname{tg} \varphi.$$

Dokładność obliczeń wysokości drzewa można wyznaczyć ze wzoru przybliżonego

$$\Delta_h \approx \left|\frac{\partial h}{\partial \varphi}\right| \Delta_\varphi + \left|\frac{\partial h}{\partial d}\right| \Delta_d,$$

gdzie obie pochodne cząstkowe są obliczone w punkcie (φ, d), który jest wynikiem pomiarów. Mamy zatem

$$\Delta_h \approx \left|\frac{d}{\cos^2 \varphi}\right| \Delta_\varphi + |\operatorname{tg} \varphi| \Delta_d = \left|\frac{30.00}{\cos^2 \frac{\pi}{4}}\right| \cdot 0.01 + \left|\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}\right| \cdot 0.1 = 0.7.$$

Wysokość drzewa można wyznaczyć w przybliżeniu z dokładnością 0.7 [m].

b) Przyrost ΔP wartości funkcji $P = P(a, b)$ w punkcie (a, b) odpowiadający przyrostom Δa zmiennej a i Δb zmiennej b można przybliżyć różniczką tej funkcji

$$\Delta P \approx \frac{\partial P}{\partial a}(a, b)\Delta a + \frac{\partial P}{\partial b}(a, b)\Delta b.$$

W zadaniu mamy $P = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = 100$ mm, $b = 240$ mm, $\Delta a = 4$ mm oraz $\Delta b = -1$ mm. Stąd

$$\Delta P \approx \left.\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|_{(100,240)} \cdot 4 + \left.\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|_{(100,240)} \cdot (-1) = \frac{4 \cdot 100 - 240 \cdot 1}{\sqrt{100^2 + 240^2}} = \frac{8}{13}.$$

Długość przekątnej prostokąta zwiększy się w przybliżeniu o 0.615... mm.

• Przykład 6.5

Wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonych obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu względem x i y podanych funkcji

a) $z = f(u, v) = e^{uv}$, gdzie $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$;

b) $z = f(u, v, w) = u^2 - v\left(\sqrt{u} - w\right)$, gdzie $u = x^2y^2$, $v = \frac{x}{y}$, $w = 2x - y$.

Rozwiązanie

a) Korzystamy ze wzorów

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Obliczamy kolejno pochodne cząstkowe funkcji f względem zmiennych u, v i pochodne cząstkowe funkcji u, v względem zmiennych x, y. Mamy zatem

$$\frac{\partial f}{\partial u} = ve^{uv}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = ue^{uv};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

Podstawiając obliczone pochodne cząstkowe do podanego na wstępie wzoru otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= ve^{uv}\frac{\partial u}{\partial x} + ue^{uv}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{uv} \\ &= \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{x^2+y^2} + \ln\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}\right)e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\ln\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{1}{x^2+y^2}\left(x\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - y\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{\ln\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= ve^{uv}\frac{\partial u}{\partial y} + ue^{uv}\frac{\partial v}{\partial y} = \left(v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y}\right)e^{uv} \\ &= \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{x^2+y^2} + \ln\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\right)e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\ln\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{1}{x^2+y^2}\left(y\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + x\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{\ln\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\end{aligned}$$

b) Korzystamy jak w poprzednim przykładzie z analogicznych wzorów

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

Teraz obliczamy pochodne cząstkowe funkcji f względem zmiennych u, v, w i pochodne cząstkowe funkcji u, v, w względem zmiennych x, y. Mamy zatem

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2u - \frac{v}{2\sqrt{u}}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\left(\sqrt{u} - w\right), \quad \frac{\partial f}{\partial w} = v;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -1.$$

Podstawiając obliczone pochodne cząstkowe do podanego powyżej wzoru otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \left(2u - \frac{v}{2\sqrt{u}}\right)\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\sqrt{u} - w\right)\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial x} \\ &= \left(2x^2y^2 - \frac{\frac{x}{y}}{2\sqrt{x^2y^2}}\right)2xy^2 - \left(\sqrt{x^2y^2} - (2x-y)\right)\frac{1}{y} + \frac{x}{y}\cdot 2 \\ &= 4x^3y^4 - \frac{x^2y}{|xy|} - |xy|\frac{1}{y} + \frac{4x}{y} - 1\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \left(2u - \frac{v}{2\sqrt{u}}\right)\frac{\partial u}{\partial y} - \left(\sqrt{u} - w\right)\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial w}{\partial y} \\ &= \left(2x^2y^2 - \frac{\frac{x}{y}}{2\sqrt{x^2y^2}}\right)2x^2y - \left(\sqrt{x^2y^2} - (2x-y)\right)\frac{-x}{y^2} + \frac{x}{y}\cdot(-1) \\ &= 4x^4y^3 - \frac{x^3}{|xy|} + |xy|\frac{x}{y^2} - \frac{2x^2}{y^2}.\end{aligned}$$

Zadania

○ Zadanie* 6.1

Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (0,0)$;

b) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ $(x_0, y_0) = (0,0)$;

c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^4+y^4+z^4}$, $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$.

○ Zadanie 6.2

Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

a) $z = \dfrac{\arcsin x}{\arccos y}$, $(x_0, y_0, z_0) = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$;

b) $z = x^y$, $(x_0, y_0, z_0) = (2, 4, 16)$.

○ Zadanie 6.3

Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

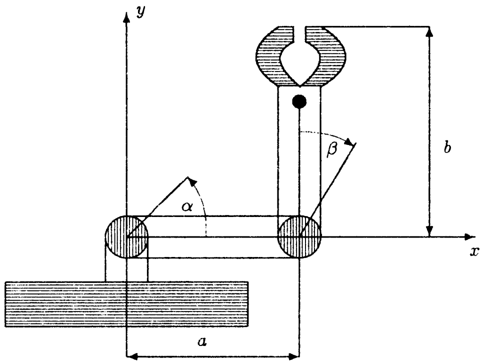
a) $(1.02)^3 \cdot (0.997)^2$; b) $\sqrt[3]{(2.93)^3 + (4.05)^3 + (4.99)^3}$.

○ Zadanie 6.4

a) Wysokość i promień podstawy stożka zmierzono z dokładnością ± 1 mm. Otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego stożka?

b) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 12$ m. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu d, jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2 cm;

c*) Robot do zgrzewania karoserii samochodowych składa się z dwóch przegubowych ramion o długości $a = 1$ m, $b = 2$ m (rysunek).



Położenie zgrzewarki jest określone przez kąty $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$. Obliczyć w przybliżeniu dokładność jej położenia, jeżeli kąty odchylenia ramion ustawiane są z dokładnością $\Delta_\alpha = \Delta_\beta = 0,003$ rad.

○ **Zadanie 6.5**

Wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonych obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu względem x i y podanych funkcji:

a) $z = f(u,v) = \ln \frac{u}{v+1}$, gdzie $u = x \sin y, v = x \cos y$;

b) $z = f(u,v,w) = \arcsin \frac{u}{v+w}$, gdzie $u = e^{\frac{x}{y}}, v = x^2 + y^2, w = 2xy$.

Odpowiedzi i wskazówki

6.1* a) nieróżniczkowalna; **b)**; **c)** różniczkowalna.

6.2 a) $z + 1 = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{12}{\pi}\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; **b)** $z - 16 = 32(x-2) + 16(y-4)\ln 2$.

6.3 a) 1.054; **b)** $5\frac{449}{450}$.

6.4 a) $\Delta_V \approx \frac{\pi}{3} \cdot 122525\,\mathrm{mm}^3 \approx 128308\,\mathrm{mm}^3$; **b)** $\Delta_d \approx \frac{19}{650}\,\mathrm{m} \approx 0.02923\,\mathrm{m}$;

c*) Wskazówka. Położenie zgrzewarki określone jest wzorem $\vec{r} = (x,y) = (a\cos\alpha + b\sin\beta, a\sin\alpha + b\cos\beta)$. Błąd położenia zgrzewarki $\Delta_{|\vec{r}|} = \sqrt{(\Delta_x)^2 + (\Delta_y)^2} = \sqrt{(-a\sin\alpha\cdot\Delta_\alpha + b\cos\beta\cdot\Delta_\beta)^2 + (a\cos\alpha\cdot\Delta_\alpha - b\sin\beta\cdot\Delta_\beta)^2}$ ≈ 0.0032 [m].

6.5 a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{\cos y}{1 + x\cos y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{ctg} y + \frac{x \sin y}{1 + x\cos y}$;

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x-y)e^{\frac{x}{y}}}{y(x+y)\sqrt{(x+y)^4 - e^{\frac{2x}{y}}}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\left(x + y - 2y^2\right)e^{\frac{x}{y}}}{y^2(x+y)\sqrt{(x+y)^4 - e^{\frac{2x}{y}}}}$.

Siódmy tydzień

Pochodna kierunkowa funkcji (4.4). Wzór Taylora. Ekstrema funkcji (4.5).

Przykłady

- **Przykład 7.1**

Obliczyć gradienty i pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

a) $f(x,y) = \sin x \cos y$, $(x_0, y_0) = (0, \pi)$, $\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

b) $f(x,y,z) = \frac{z-x}{z+y}$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -3)$, $\vec{v} = \left(-\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7}\right)$.

Rozwiązanie

a) Dla funkcji $f(x,y) = \sin x \cos y$ oraz punktu $(x_0, y_0) = (0, \pi)$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi) = -1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) = 0.$$

Stąd

$$\mathbf{grad}\, f(0,\pi) = (-1, 0).$$

Ponieważ funkcja f ma na otoczeniu punktu (x_0, y_0) ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, więc pochodna kierunkowa tej funkcji w kierunku wersora $\vec{v}$ wyraża się wzorem

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) \circ \vec{v}.$$

Dla wersora $\vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,\pi) = (-1, 0) \circ \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) W rozwiązaniu wykorzystamy wzór

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0, z_0) = \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0, z_0) \circ \vec{v}.$$

Wzór ten można stosować, gdy wszystkie pochodne cząstkowe funkcji f są ciągłe. Sprawdzimy zatem ciągłość tych pochodnych w rozważanym przypadku. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{z+y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x-z}{(z+y)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y+x}{(z+y)^2}.$$

Stąd $\operatorname{grad} f(1,0,-3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$. Ponieważ obliczone pochodne cząstkowe są ilorazami funkcji ciągłych w dziedzinie rozważanej funkcji, więc także są tam ciągłe. Korzystając teraz z podanego na wstępie wzoru otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0,-3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right) \circ \left(-\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7}\right) = -\frac{8}{63}.$$

• Przykład 7.2

Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

b) $f(x,y) = |x-y|$, $(x_0,y_0) = (1,1)$, $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Rozwiązanie

Pochodna kierunkowa funkcji f w punkcie (x_0,y_0) w kierunku wersora $\vec{v} = (v_x, v_y)$ wyraża się wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) \stackrel{def}{=} \lim_{t\to 0+} \frac{f(x_0+v_x t, y_0+v_y t) - f(x_0,y_0)}{t}.$$

a) Zatem dla funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, punktu $(x_0,y_0) = (0,0)$ oraz wersora $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0+} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}t\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{t}{t} = 1.$$

b) Przyjmując teraz w przytoczonym na wstępie wzorze $f(x,y) = |x-y|$, $(x_0,y_0) = (1,1)$ oraz $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ otrzymamy

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = \lim_{t\to 0+} \frac{f\left(1+\frac{3}{5}t, 1+\frac{4}{5}t\right) - f(1,1)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\left|\left(1+\frac{3}{5}t\right) - \left(1+\frac{4}{5}t\right)\right| - 0}{t} = \frac{1}{5}.$$

• Przykład 7.3

Napisać wzór Taylora z resztą R_n dla podanych funkcji w otoczeniu wskazanych punktów, jeżeli:

a) $f(x,y) = \sin^2(x+y)$, $(x_0,y_0) = (\pi,\pi)$, $n = 2$;

b) $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$, $(x_0,y_0) = (-2,1)$, $n = 3$.

Rozwiązanie

a) Wzór Taylora w punkcie (x_0, y_0) dla funkcji $z = f(x,y)$ oraz dla $n = 2$ ma postać

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right] + R_2(x,y),$$

gdzie

$$R_2(x,y) = \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta)(y-y_0)^2\right],$$

przy czym $(\xi,\eta) = \big(x_0 + \theta(x-x_0), y_0 + \theta(y-y_0)\big)$ oraz $0 < \theta < 1$. Obliczymy teraz potrzebne pochodne cząstkowe. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 2\sin(x+y)\cos(x+y) = \sin 2(x+y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2\cos 2(x+y).$$

Zatem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi,\pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(\pi,\pi) = \sin 2(\pi+\pi) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta) = 2\cos 2(\xi+\eta),$$

gdzie $(\xi,\eta) = \big(\pi + \theta(x-\pi), \pi + \theta(y-\pi)\big)$. Ponadto $f(\pi,\pi) = 0$. Tak więc poszukiwany wzór ma postać

$$\begin{aligned}\sin^2(x+y) &= \frac{1}{2}\big(2\cos 2(\xi+\eta) + 2\cdot 2\cos 2(\xi+\eta) + 2\cos 2(\xi+\eta)\big) = 4\cos 2(\xi+\eta)\\ &= 4\cos[2\theta(x+y-2\pi)], \quad \text{gdzie } 0<\theta<1.\end{aligned}$$

b) Wzór Taylora w punkcie (x_0, y_0) dla funkcji $z = f(x,y)$ oraz dla $n = 3$ ma postać

$$\begin{aligned}f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right]\\ &+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]\\ &+R_3(x,y),\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}R_3(x,y) = \frac{1}{3!}\bigg[&\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\xi,\eta)(x-x_0)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\xi,\eta)(x-x_0)^2(y-y_0)\\ &+ 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\xi,\eta)(x-x_0)(y-y_0)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\xi,\eta)(y-y_0)^3\bigg],\end{aligned}$$

przy czym $(\xi,\eta) = (x_0 + \theta(x-x_0), y_0 + \theta(y-y_0))$ oraz $0 < \theta < 1$. Obliczymy teraz potrzebne pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$$

w punkcie $(x_0, y_0) = (-2, 1)$. Mamy $f(-2,1) = 1$ oraz

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) = (-2x+2y-6)|_{(-2,1)} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) = (2x+6y-2)|_{(-2,1)} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,1) = -2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,1) = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,1) = 6;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) \equiv 0.$$

Zatem

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{1!}\left[0\cdot(x+2) + 0\cdot(y-1)\right] + \frac{1}{2!}\left[-2(x+2)^2 + 2\cdot 2(x+2)(y-1) + 6(y-1)^2\right]$$
$$+R_3(x,y),$$

gdzie

$$R_3(x,y) = \frac{1}{3!}\left[0\cdot(x+2)^3 + 3\cdot 0\cdot(x+2)^2(y-1) + 3\cdot 0\cdot(x+2)(y-1)^2 + 0\cdot(y-1)^3\right] \equiv 0.$$

Ostatecznie $f(x,y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2$.

• Przykład 7.4

Zbadać, czy podane funkcje mają ekstrema lokalne:

a) $f(x,y) = 2 - \sqrt{3x^2+4y^2}$; b) $f(x,y) = x^8 - y^4$.

Rozwiązanie

a) Dla funkcji $f(x,y) = 2 - \sqrt{3x^2+4y^2}$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+4y^2}} = -\frac{3x}{\sqrt{3x^2+4y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{8y}{2\sqrt{3x^2+4y^2}} = -\frac{4y}{\sqrt{3x^2+4y^2}},$$

gdy $(x,y) \neq (0,0)$. Zatem $\dfrac{\partial f}{\partial x} \neq 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, gdy $(x,y) \neq (0,0)$. Tak więc jedynym miejscem, w którym funkcja f może mieć ekstremum jest punkt $(0,0)$. Rzeczywiście w punkcie tym funkcja f ma maksimum lokalne właściwe równe 2, gdyż dla wszystkich $(x,y) \neq (0,0)$ mamy

$$f(x,y) = 2 - \sqrt{3x^2+4y^2} < 2 = f(0,0).$$

b) Zauważmy najpierw, że funkcja $f(x,y) = x^8 - y^4$ ma na $\mathbf{R}^2$ pochodne cząstkowe dowolnego rzędu. Z warunku koniecznego istnienia ekstremum wynika, że funkcja f może mieć ekstrema jedynie w punktach zerowania się obu pierwszych pochodnych cząstkowych. Zatem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right) \iff \left(8x^7 = 0, \ -4y^3 = 0\right) \iff (x = 0, \ y = 0).$$

Jednak funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie $(0,0)$. Pokażemy mianowicie, że w każdym otoczeniu punktu $(0,0)$ można znaleźć punkty, w których funkcja ma wartość mniejszą od $f(0,0) = 0$ oraz punkty, w których ma ona wartość większą od $f(0,0) = 0$.

Rzeczywiście jakiekolwiek byśmy wybrali otoczenie punktu $(0,0)$, to dla dostatecznie dużej liczby naturalnej n punkty $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ będą należały do tego otoczenia. Ponadto mamy

$$f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1}{n^8} > 0 = f(0,0) \quad \text{oraz} \quad f\left(0, \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^4} < 0 = f(0,0).$$

• Przykład 7.5

Znaleźć ekstrema podanych funkcji:

a) $f(x,y) = \left(2x + y^2\right) e^x$; b) $f(x,y) = (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$.

Rozwiązanie

a) Dla funkcji $f(x,y) = \left(2x + y^2\right) e^x$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^x + \left(2x + y^2\right) e^x = \left(2x + y^2 + 2\right) e^x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^x + \left(2x + y^2 + 2\right) e^x = \left(2x + y^2 + 4\right) e^x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2ye^x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^x.$$

Zatem wobec warunku koniecznego $\left(\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right)$ funkcja ta może mieć ekstrema tylko w punktach, w których

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(2x + y^2 + 2\right) e^x = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^x = 0,$$

czyli tylko w punkcie $(-1,0)$. Ponieważ w punkcie tym mamy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{vmatrix} = 4e^{-2} > 0,$$

więc z warunku wystarczającego wynika, że funkcja f ma tam ekstremum $\left(f(-1,0) = -2e^{-1}\right)$, przy czym jest to minimum, gdyż $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = 2e^{-1} > 0$.

b) Wobec znanych wzorów trygonometrycznych mamy

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (\cos x + \cos y)^2 + \left(\sin x + \sin y\right)^2 \\ &= \left(\cos^2 x + 2\cos x \cos y + \cos^2 y\right) + \left(\sin^2 x + 2\sin x \sin y + \sin^2 y\right) \\ &= \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) + \left(\cos^2 y + \sin^2 y\right) + 2\left(\cos x \cos y + \sin x \sin y\right) \\ &= 1 + 1 + 2\cos(x - y). \end{aligned}$$

Zatem funkcja f ma ekstrema lokalne w tych punktach $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$, w których funkcja $\cos u$, $u = x - y$ ma ekstrema. Tak więc funkcja f ma maksimum lokalne (równe 4) w punktach postaci $x - y = 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, oraz minima lokalne (równe 0) w punktach postaci $x - y = (2k+1)\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Przykład 7.6

Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach:

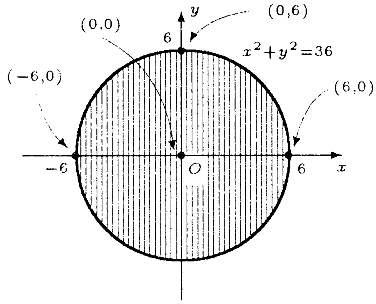
a) $f(x,y) = x^2 - 2y^2$, $x^2 + y^2 \leqslant 36$;

b) $f(x,y) = x^2y - 8x - 4y$, trójkąt o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,4)$ i $(4,0)$.

Rozwiązanie

a) Znajdziemy najpierw punkty we wnętrzu rozważanego zbioru (zobacz rysunek), w których funkcja f może mieć ekstrema. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4y.$$



Z warunku koniecznego

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right)$$

wynika, że funkcja f może mieć ekstrema lokalne tylko w punktach, w których

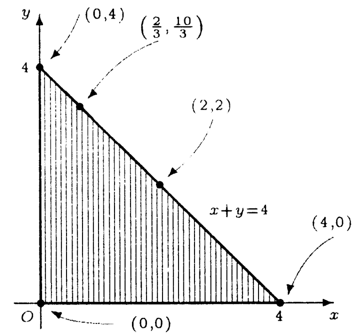
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4y = 0,$$

czyli w punkcie $(0,0)$, gdzie $f(0,0) = 0$. Zauważmy, że punkt ten należy do wnętrza rozważanego obszaru. Zbadamy teraz funkcję f na okręgu $x^2 + y^2 = 36$. Zauważmy najpierw, że funkcja f spełnia warunek $f(x,y) = f(-x,-y)$. Zatem badanie funkcji na okręgu $x^2 + y^2 = 36$ wystarczy ograniczyć do pierwszej i drugiej ćwiartki układu, a więc do badania na półokręgu $y = \sqrt{36 - x^2}$, gdzie $x \in [-6,6]$. Mamy zatem

$$g(x) = f\left(x, \sqrt{36 - x^2}\right) = x^2 - 2\left(36 - x^2\right) = 3x^2 - 72, \quad x \in [-6,6].$$

Funkcja kwadratowa g przyjmuje wartość najmniejszą (równą -72) w punkcie $x = 0$ (wtedy $y = 6$) oraz wartość największą (równą 36) w punkcie $x = -6$ i $x = 6$ (wtedy $y = 0$). Z porównania otrzymanych wartości w punktach $(0,0)$, $(-6,0)$, $(6,0)$, $(0,6)$ wynika, że funkcja f osiąga wartość najmniejszą równą -72 w punktach $(0,6)$, $(0,-6)$, a wartość największą równą 36 w punktach $(-6,0)$ i $(6,0)$.

b) Jak w poprzednim zadaniu badanie rozpoczynamy od wyznaczenia punktów we wnętrzu rozważanego obszaru (zobacz rysunek), w których funkcja może mieć ekstrema. Wobec warunku koniecznego funkcja $f(x,y) = x^2y - 8x - 4y$ może mieć ekstrema tylko w punktach, w których zachodzą równości



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 8 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 4 = 0.$$

Rozwiązując powyższy układ otrzymamy dwa punkty $(2,2)$ i $(-2,-2)$.

Zauważmy, że punkt $(2,2)$ leży na brzegu, a punkt $(-2,-2)$ poza rozważanym obszarem, czyli żaden z nich nie leży w jego wnętrzu. Zbadamy teraz funkcję f na brzegu obszaru, który składa się z trzech odcinków (zobacz rysunek). Badanie funkcji na brzegu oznacza jej analizę odpowiednio na prostych

$$\begin{aligned} I: &\quad y=0, \text{ gdzie } 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ II: &\quad x=0, \text{ gdzie } 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ III: &\quad y=4-x, \text{ gdzie } 0 \leqslant x \leqslant 4. \end{aligned}$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} I: &\quad f_1(x)=f(x,0)=-8x, \text{ gdzie } 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ II: &\quad f_2(y)=f(0,y)=-4y, \text{ gdzie } 0 \leqslant y \leqslant 4, \\ III: &\quad f_3(x)=f(x,4-x)=-x^3+4x^2-4x-16, \text{ gdzie } 0 \leqslant x \leqslant 4. \end{aligned}$$

Ponieważ dwie pierwsze funkcje są liniowe, więc swoje wartości ekstremalne przyjmują na końcach przedziału określoności. Mamy zatem trzy punkty, w których funkcja f może mieć wartości ekstremalne. Są to punkty $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,4)$. W punktach tych mamy $f_1(0)=f(0,0)=f_2(0)=0$, $f_1(4)=f(4,0)=-32$, $f_2(4)=f(0,4)=-16$. Natomiast dla funkcji f_3 mamy $f_3'(x)=-3x^2+8x-4$. Zatem

$$f_3'(x)=0 \iff -3x^2+8x-4=0 \iff x=2 \text{ lub } x=\frac{2}{3}.$$

Ponieważ wyznaczone powyżej dwa punkty należą do wnętrza przedziału $[0,4]$, więc funkcja f_3 może przyjmować wartości ekstremalne dla $x=\frac{2}{3}$, $x=2$ oraz na końcach przedziału, czyli $x=0$ i $x=4$. Tym samym funkcja f może mieć wartości ekstremalne na prostej III w punktach $\left(\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)$, $(2,2)$, $(0,4)$ i $(4,0)$, przy czym $f_3\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3},\frac{10}{3}\right)=-\frac{464}{27}$, $f_3(2)=f(2,2)=-16$, $f_3(0)=f(0,4)=-16$, $f_3(4)=f(4,0)=-32$. Z porównania otrzymanych wartości wynika, że przyjmuje ona wartość najmniejszą równą -32 w punkcie $(4,0)$, a wartość największą równą 0 w punkcie $(0,0)$.

Zadania

○ Zadanie 7.1

Obliczyć gradienty i pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

a) $f(x,y)=x^2+y^2$, $\quad (x_0,y_0)=(-3,4)$, $\quad \vec{v}=\left(\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$;

b) $f(x,y,z)=e^{xyz}$, $\quad (x_0,y_0,z_0)=(-1,1,-1)$, $\quad \vec{v}=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

○ Zadanie 7.2

Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

a) $f(x,y)=2|x|+|y|$, $\quad (x_0,y_0)=(0,0)$, $\quad \vec{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

b) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$, $\quad (x_0,y_0)=(1,0)$, $\quad \vec{v}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

○ **Zadanie 7.3**

Napisać wzór Taylora z resztą R_n dla podanych funkcji w otoczeniu wskazanych punktów, jeżeli:

a) $f(x,y)=\sin\left(x^2+y^2\right)$, $\quad (x_0,y_0)=(0,0)$, $\quad n=3$;

b) $f(x,y)=(x+y)^3$, $\quad (x_0,y_0)=(-1,1)$, $\quad n=4$.

○ **Zadanie 7.4**

Zbadać, czy podane funkcje mają ekstrema lokalne:

a) $f(x,y)=2|x|+3|y|$; $\quad$ b) $f(x,y)=2x^4-3y^7$.

○ **Zadanie 7.5**

Znaleźć ekstrema podanych funkcji:

a) $f(x,y)=3(x-1)^2+4(y+2)^2$; $\quad$ b) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$;

c) $f(x,y)=x^3+3xy^2-51x-24y$; $\quad$ d) $f(x,y)=e^{-\left(x^2+y^2+2x\right)}$.

○ **Zadanie 7.6**

Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach:

a) $f(x,y)=x^2+y^2$, $\quad |x|+|y|\leqslant 2$;

b) $f(x,y)=xy^2+4xy-4x$, $\quad -3\leqslant x\leqslant 3,\ -3\leqslant y\leqslant 0$;

c*) $f(x,y)=\dfrac{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)}{x^2+y^2+2}$, $\quad \boldsymbol{R}^2$;

d) $f(x,y)=x^4+y^4$, $\quad x^2+y^2\leqslant 9$.

Odpowiedzi i wskazówki

7.1 a) $\mathbf{grad}\, f(-3,4)=(-6,8)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-3,4)=-\dfrac{32}{13}$; **b)** $\mathbf{grad}\, f(-1,1,-1)=(-e,e,-e)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-1,1,-1)=-\dfrac{e}{4}\left(5+\sqrt{3}\right)$.

7.2 a) $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$; **b)** $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0)=\infty$.

7.3 a) $\sin\left(x^2+y^2\right)=u-\dfrac{1}{6}\left(12\Theta u^2\sin\Theta^2 u+8\Theta^3u^3\cos\Theta^2 u\right)$, gdzie $u=x^2+y^2$ oraz $\Theta\in(0,1)$; **b)** $(x+y)^3=(x+1)^3+3(x+1)^2(y-1)+3(x+1)(y-1)^2+(y-1)^3$.

7.4 a) $(0,0)$ minimum lokalne właściwe; **b)** nie ma ekstremów lokalnych.

7.5 a) $(1, -2)$ minimum lokalne właściwe; **b)** $(1, 1)$ minimum lokalne właściwe; **c)** $(4, 1)$ minimum lokalne właściwe, $(-4, -1)$ maksimum lokalne właściwe; **d)** $(-1, 0)$ maksimum lokalne właściwe.

7.6 a) w punkcie $(0, 0)$ wartość najmniejsza równa 0, w punktach $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$ wartość największa równa 4; **b)** w punkcie $(3, -2)$ wartość najmniejsza równa -24, w punkcie $(-3, -2)$ wartość największa równa 24; **c*)** nie osiąga ani wartości najmniejszej ani wartości największej; **d)** w punkcie $(0, 0)$ wartość najmniejsza równa 0, w punktach $(0, \pm 3)$ i $(\pm 3, 0)$ wartość największa równa 81.

Ósmy tydzień

Zastosowanie ekstremów funkcji w geometrii, fizyce i technice (4.6). Funkcje uwikłane (4.7).

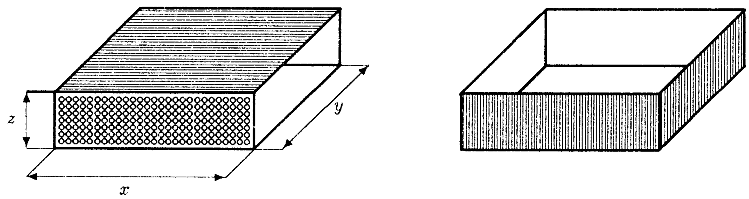
Przykłady

- **Przykład 8.1**

a) Na płaszczyźnie $x + 2y - 3z = 6$ znaleźć punkt położony najbliżej początku układu współrzędnych;

b) Znaleźć wymiary prostopadłościanu wpisanego w kulę o promieniu R, który ma największą objętość;

c) Pudełko zapałek składa się z ramki i szufladki (zobacz rysunek). Jakie powinny być wymiary pudełka o objętości $V = 24\,\mathrm{cm}^3$, aby do jego sporządzenia zużyć najmniej kartonu? Nie uwzględniać grubości kartonu ani zakładek do sklejania.



Rozwiązanie

a) Łatwo uzasadnić, że odległość dwóch punktów będzie najmniejsza, gdy kwadrat tej odległości będzie najmniejszy. Kwadrat odległości dowolnego punktu $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3$ od początku układu współrzędnych określony jest wzorem $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Interesują nas jednak tylko punkty leżące na płaszczyźnie $x + 2y - 3z = 6$. Zatem kwadrat odległości punktu tej płaszczyzny od początku układu współrzędnych jest określony wzorem

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \left[\frac{1}{3}(x + 2y - 6)\right]^2, \quad \text{gdzie} \quad (x, y) \in \boldsymbol{R}^2.$$

Tak więc mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2 \cdot \frac{1}{3}(x + 2y - 6) \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{4}{3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2\cdot\frac{1}{3}(x+2y-6)\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{4}{9}x + \frac{26}{9}y - \frac{8}{3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{20}{9}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{4}{9}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{26}{9}.$$

Z warunku koniecznego wynika, że funkcja f może mieć ekstrema tylko w punktach, w których obie jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu zerują się. Mamy zatem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{20}{9}x + \frac{4}{9}y - 1\frac{1}{3} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{9}x + \frac{26}{9}y - \frac{8}{3} = 0.$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest punkt $(x_0, y_0) = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$. Ponieważ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{20}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{26}{9} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right) = \frac{20}{9} > 0,$$

więc z warunku wystarczającego istnienia ekstremum wynika, że funkcja f ma w punkcie $\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$ minimum lokalne właściwe. Zbadamy teraz zachowanie funkcji f, gdy punkt (x, y) oddala się od początku układu do nieskończoności, tj. gdy $x^2 + y^2 \longrightarrow \infty$. Mamy

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = \lim_{x^2+y^2\to\infty} \left\{x^2 + y^2 + \left[\frac{1}{3}(x+2y-6)\right]^2\right\} = \infty.$$

Zatem punktem płaszczyzny $x + 2y - 3z = 6$ leżącym najbliżej początku układu współrzędnych jest $\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{9}{7}\right)$.

b) Jeżeli długość krawędzi prostopadłościanu oznaczymy przez $2x, 2y, 2z$, to jego objętość wyraża się wzorem $|U| = 8xyz$. Ponieważ prostopadłościan ten wpisany jest w kulę o promieniu R, więc jego krawędzie spełniają warunek $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Zatem

$$U(x,y) = 8xy\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad \text{gdzie} \quad x > 0, \ y > 0 \ \text{oraz} \ x^2 + y^2 < R^2.$$

Zauważmy, że nieujemna funkcja ma ekstrema w tych samych punktach co jej kwadrat. Zatem wystarczy znaleźć ekstrema funkcji

$$f(x,y) = U^2(x,y) = 64x^2y^2\left(R^2 - x^2 - y^2\right).$$

Mamy więc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 64xy^2\left(2R^2 - 4x^2 - 2y^2\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 64x^2y\left(2R^2 - 4y^2 - 2x^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 128y^2\left(R^2 - 6x^2 - y^2\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 128x^2\left(R^2 - x^2 - 6y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 256xy\left(R^2 - 2x^2 - 2y^2\right).$$

Rozwiązując układ równań (warunek konieczny istnienia ekstremum)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy^2\left(2R^2 - 4x^2 - 2y^2\right) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y\left(2R^2 - 4y^2 - 2x^2\right) = 0$$

i uwzględniając fakt, że $x, y > 0$ otrzymujemy tylko jeden punkt $\left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}\right)$, w którym funkcja f może mieć ekstremum. Ponieważ mamy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{512}{9}R^4 & -\frac{256}{9}R^4 \\ -\frac{256}{9}R^4 & -\frac{512}{9}R^4 \end{vmatrix} = \frac{3 \cdot 256^2}{81} R^8 > 0$$

oraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{512}{9}R^4 < 0,$$

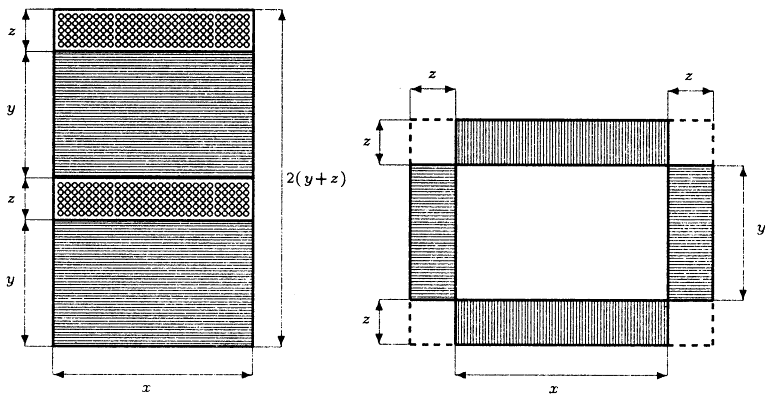
więc z warunku wystarczającego istnienia ekstremum wynika, że funkcja f ma w punkcie $\left(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ maksimum lokalne właściwe. Ustalimy teraz wartość największą funkcji f w dziedzinie. W tym celu zbadamy zachowanie funkcji f na brzegu dziedziny. Dla punktu (x_0, y_0) należącego do brzegu dziedziny, tj. spełniającego warunek $(x_0)^2 + (y_0)^2 = R^2$ albo $x_0 = 0$ oraz $0 \leqslant y_0 < R$ albo $y_0 = 0$ oraz $0 < x_0 < R$, mamy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = 0.$$

Tak więc największą objętość ma prostopadłościan o wymiarach

$$x = y = z = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

c) Niech x, y, z oznaczają długości krawędzi pudełka zapałek. Wtedy mamy $xyz = V$ i stąd $z = \frac{V}{xy}$. Ramka po rozwinięciu jest prostokątem o bokach $2(y + z)$ oraz x, zatem ma pole $2x(y + z)$.



Natomiast szufladka po rozwinięciu ma kształt prostokąta o bokach $x + 2z$ oraz $y + 2z$ z wyciętymi w wierzchołkach kwadratami o boku z, zatem ma pole $(x + 2z)(y + 2z) - 4z^2$. Całkowite pole kartonu potrzebnego do sporządzenia pudełka wyraża się wzorem

$$S(x, y) = 2x(y + z) + (x + 2z)(y + 2z) - 4z^2 = 3xy + 4xz + 2yz.$$

Po uwzględnieniu zależności $z = \dfrac{V}{xy}$ otrzymamy funkcję

$$S(x, y) = 3xy + \frac{2V}{x} + \frac{4V}{y}.$$

Znajdziemy teraz wartość najmniejszą funkcji S na zbiorze

$$D = \{(x, y) : x > 0,\ y > 0\}.$$

Korzystając z warunku koniecznego istnienia ekstremum otrzymamy układ równań

$$3y - \frac{2V}{x^2} = 0, \quad 3x - \frac{4V}{y^2} = 0.$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu równań jest para

$$(x_0, y_0) = \left(\sqrt[3]{\frac{V}{3}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{3}}\right).$$

Korzystając teraz z warunku wystarczającego zbadamy, czy funkcja S ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne. Mamy

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial y^2} \end{bmatrix} (x_0, y_0) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{4V}{x^3} & 3 \\ 3 & \dfrac{8V}{y^3} \end{bmatrix} (x_0, y_0) = \frac{32V^2}{(x_0 y_0)^3} - 9 = 27 > 0.$$

Ponadto

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{4V}{(x_0)^3} > 0.$$

Zatem badana funkcja w punkcie (x_0, y_0) ma minimum lokalne właściwe. Należy jeszcze uzasadnić, że w tym punkcie funkcja S realizuje minimum globalne. W tym celu zbadamy zachowanie się funkcji S, gdy punkt $(x, y) \in D$ dąży do brzegu obszaru D. Dla punktu $(x^*, 0)$, gdzie $x^* \geqslant 0$, tego brzegu mamy

$$\lim_{(x,y)\to(x^*,0+)} S(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x^*,0+)} \left(3xy + \frac{2V}{x} + \frac{4V}{y}\right) = \infty.$$

Podobnie jest dla punktu $(0, y^*)$, gdzie $y^* > 0$. Zatem w punkcie

$$(x_0, y_0) = \left(\sqrt[3]{\frac{V}{3}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{3}}\right)$$

funkcja S przyjmuje najmniejszą wartość. Podstawiając $V = 24\,\mathrm{cm}^3$ otrzymamy optymalne wymiary pudełka zapałek: $x_0 = 2\,\mathrm{cm}$, $y_0 = 4\,\mathrm{cm}$, $z_0 = 3\,\mathrm{cm}$.

• Przykład 8.2

Zbadać, czy równanie $x - \sin y = 0$ określa jednoznacznie ciągłą funkcję uwikłaną $y = y(x)$ na pewnym otoczeniu punktów $A = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, $B = \left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $C = (0, 2\pi)$?

Rozwiązanie

W zadaniu wykorzystamy twierdzenie o istnieniu funkcji uwikłanej. Sprawdzimy, czy w punktach

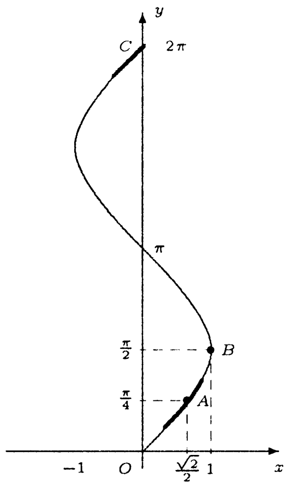
$$A=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right),\quad B=\left(1,\frac{\pi}{2}\right),\quad C=(0,2\pi)$$

funkcja $F(x,y)=x-\sin y$ spełnia założenia wspomnianego twierdzenia. Funkcja F ma na otoczeniu tych punktów ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu. Ponadto $\frac{\partial F}{\partial y}=-\cos y$. W punktach A, B, C sprawdzamy warunek $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Mamy

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}\neq 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(1,\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{2}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,2\pi)=-\cos 2\pi\neq 0.$$



Zatem na otoczeniu punktów $x_A=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_C=0$ równanie $x-\sin y=0$ przedstawia funkcję uwikłaną postaci $y=y(x)$. Ponieważ w punkcie $B=(x_B,y_B)=\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ nie są spełnione założenia twierdzenia o funkcji uwikłanej, więc nie można z niego korzystać. Analizując jednak wykres funkcji $x=\sin y$ (zobacz rysunek) widać, że w otoczeniu punktu $x_B=1$ równanie $x-\sin y=0$ nie określa funkcji jednoznacznej uwikłanej postaci $y=y(x)$.

• Przykład 8.3

Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach tych krzywych:

a) $x^3+y^3-2xy=0$, $(x_0,y_0)=(1,1)$; b) $xe^y+ye^x=e^{xy}$, $(x_0,y_0)=(1,0)$.

Rozwiązanie

Równanie stycznej do krzywej określonej równaniem $F(x,y)=0$ w punkcie (x_0,y_0) tej krzywej ma postać

$$y-y_0=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}(x-x_0).$$

a) W naszym przypadku mamy

$$F(x,y)=x^3+y^3-2xy\quad\text{oraz}\quad(x_0,y_0)=(1,1),$$

więc

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 1.$$

Zatem równanie szukanej stycznej ma postać

$$y - 1 = -\frac{1}{1}(x-1), \quad \text{czyli} \quad y = -x + 2.$$

b) W tym przykładzie mamy

$$F(x,y) = xe^y + ye^x - e^{xy} \quad \text{oraz} \quad (x_0, y_0) = (1,0).$$

Zatem

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,0) = e^y + ye^x - ye^{xy}\Big|_{(1,0)} = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = xe^y + e^x - xe^{xy}\Big|_{(1,0)} = e.$$

Równanie prostej stycznej ma więc postać

$$y - 0 = -\frac{1}{e}(x-1), \quad \text{stąd} \quad y = -\frac{1}{e}x + \frac{1}{e}.$$

• Przykład 8.4

Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych podanymi równaniami:

a) $y -$ arctg $y - x^3 = 0$; b) $xe^y + ye^x - 2 = 0$ w punkcie $x_0 = 0$.

Rozwiązanie

a) Ponieważ $y = y(x)$ jest funkcją uwikłaną określoną równaniem

$$y - \operatorname{arctg} y - x^3 = 0,$$

więc

$$y(x) - \operatorname{arctg} y(x) - x^3 \equiv 0.$$

Różniczkując obustronnie względem x powyższą tożsamość otrzymamy

$$y'(x) - \frac{1}{1+y^2(x)}y'(x) - 3x^2 = 0.$$

Stąd

$$y'(x)\frac{1+y^2(x)-1}{1+y^2(x)} = 3x^2,$$

czyli pierwsza pochodna wyraża się wzorem

$$y'(x) = \frac{1+y^2(x)}{y^2(x)} \cdot 3x^2 = \left(1 + \frac{1}{y^2(x)}\right) \cdot 3x^2 = 3x^2 + \frac{3x^2}{y^2(x)}.$$

Różniczkując z kolei powyższą tożsamość względem x otrzymamy

$$\begin{aligned} y''(x) &= 6x + \frac{6xy^2(x) - 2y(x)y'(x) \cdot 3x^2}{[y^2(x)]^2} \\ &= 6x + \frac{6xy(x) - 6y'(x)x^2}{y^3(x)} = 6x + 6x\frac{y(x) - y'(x)x}{y^3(x)}. \end{aligned}$$

Uwzględniając teraz otrzymany poprzednio wzór na $y'(x)$ mamy

$$y''(x) = 6x + 6x\frac{y(x) - \dfrac{1+y^2(x)}{y^2(x)}3x^2 \cdot x}{y^3(x)} = 6x\left(1 + \frac{y^3(x) - 3x^3\left(1+y^2(x)\right)}{y^5(x)}\right).$$

b) Znajdziemy najpierw wartość funkcji uwikłanej $y = y(x)$ w punkcie $x_0 = 0$. Podstawiając $x_0 = 0$ do warunku $F(x, y) = xe^y + ye^x - 2 = 0$ otrzymamy $y_0 = 2$. Sprawdzimy teraz warunki gwarantujące istnienie i różniczkowalność funkcji uwikłanej na otoczeniu punktu $x_0 = 0$. Ponieważ pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^y + ye^x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = e^x + xe^y$$

są ciągłe na otoczeniu punktu $(x_0, y_0) = (0, 2)$ oraz ponieważ spełniony jest warunek $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,2) = 1 \neq 0$, więc istnieje jednoznacznie określona funkcja uwikłana. Pochodna tej funkcji w punkcie $x_0 = 0$ wyraża się wzorem.

$$y'(0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,2)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,2)} = -\frac{2+e^2}{1} = -e^2 - 2.$$

Obliczymy teraz drugą pochodną funkcji uwikłanej w punkcie $x_0 = 0$. Różniczkując dwukrotnie obie strony tożsamości

$$xe^y + ye^x - 2 \equiv 0 \,\Big|\, \frac{d}{dx}$$

otrzymamy kolejno

$$e^y + xe^y y' + y'e^x + ye^x \equiv 0 \,\Big|\, \frac{d}{dx},$$

$$2y'e^y + x\left(y'\right)^2 e^y + xy''e^y + y''e^x + 2y'e^x + ye^x \equiv 0.$$

Podstawiając w ostatniej tożsamości $x_0 = 0$, $y(0) = 2$ oraz $y'(0) = -e^2 - 2$, otrzymamy

$$y''(0) = 2e^4 + 6e^2 + 2.$$

• Przykład 8.5

Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanych postaci $y = y(x)$ określonych podanymi równaniami:

a) $x^2 + xy + y^2 + x - y - 2 = 0$; b) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Rozwiązanie

Punktów, w których funkcja uwikłana $y = y(x)$ określona równaniem $F(x, y) = 0$ może mieć ekstrema, szukamy rozwiązując układ równań i nierówność (warunki konieczne istnienia ekstremów) postaci:

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0.$$

a) W tym przykładzie mamy do rozwiązania układ równań

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y - 2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniami tego układu są punkty $(x_1, y_1) = (0, -1)$, $(x_2, y_2) = (-2, 3)$. Zatem tylko w tych punktach funkcje uwikłane (jeżeli istnieją) mogą mieć ekstrema. Zbadamy teraz, czy w tych punktach spełniony jest warunek gwarantujący istnienie funkcji uwikłanej. Mamy

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,-1) = (x + 2y - 1)\Big|_{(0,-1)} = -3 \neq 0$$

oraz

$$\frac{\partial F}{\partial y}(-2,3) = (x + 2y - 1)\Big|_{(-2,3)} = 3 \neq 0.$$

Zatem w otoczeniach punktów $x_1 = 0$ i $x_2 = -2$ istnieją funkcje uwikłane. Niżej, korzystając z warunku wystarczającego, ustalimy, czy funkcje uwikłane mają w „podejrzanych" punktach ekstrema. Mamy $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 2$ dla każdego $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$. Ponieważ

$$-\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,-1)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,-1)} = \frac{-2}{x + 2y - 1}\Bigg|_{(0,-1)} = \frac{2}{3} > 0$$

oraz

$$-\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(-2,3)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(-2,3)} = \frac{-2}{x + 2y - 1}\Bigg|_{(-2,3)} = -\frac{2}{3} < 0,$$

więc funkcje uwikłane postaci $y = y(x)$ mają w punktach $x_1 = 0$ i $x_2 = -2$ odpowiednio minimum oraz maksimum lokalne właściwe.

b) W tym przykładzie mamy do rozwiązania układ równań

$$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0.$$

Układ ten ma rozwiązania $(0,0)$, $\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right)$. Zauważmy teraz, że tylko punkt $\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right)$ spełnia trzeci warunek

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right) = 3\sqrt[3]{2} \neq 0.$$

Ponieważ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x,$$

więc

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right) = 6\sqrt[3]{2}.$$

Zatem

$$-\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right)} = -\frac{6\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{2}} = -2 < 0.$$

Oznacza to, że rozważana funkcja w punkcie $\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right)$ ma maksimum lokalne właściwe. Natomiast w otoczeniu punktu $(0,0)$ nie istnieje jednoznacznie określona funkcja uwikłana $y = y(x)$. Można to pokazać badając liczbę rozwiązań równania $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ dla ustalonej wartości zmiennej $x = a > 0$.

Zadania

○ Zadanie 8.1

a) W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1, 5)$, $B = (1, 4)$, $C = (2, -3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

b) Jakie powinny być długość a, szerokość b i wysokość h prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

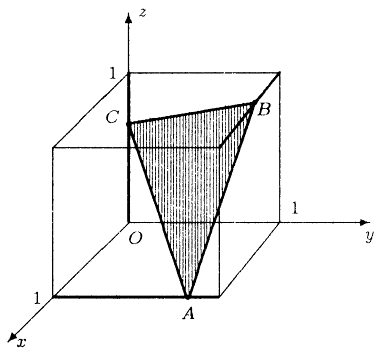
c) Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k: \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases} \qquad l: \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$

d) Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216\,\mathrm{m}^3$. Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie $30\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$, do budowy podłogi w cenie $40\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$, a sufitu w cenie $20\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$. Znaleźć długość a, szerokość b i wysokość c magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

e*) Wśród trójkątów wpisanych w koło o promieniu R znaleźć ten, który ma największe pole;

f*) Na trzech parami skośnych krawędziach sześcianu (rysunek) wyznaczyć po jednym punkcie w ten sposób, aby pole trójkąta o wierzchołkach w tych punktach było najmniejsze.



○ Zadanie 8.2

Zbadać, czy podane równania określają jednoznacznie ciągłe funkcje uwikłane $y = y(x)$ na pewnych otoczeniach zadanych punktów:

a) $x^y - y^x = 0$, i) $A = (2, 4)$, ii*) $B = (e, e)$, iii) $C = (3, 3)$;

b) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 0$, i) $A = (0, 0)$, ii*) $B = (1, 1)$, iii) $C = (-1, 1)$.

○ Zadanie 8.3

Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach tych krzywych:

a) $x^3 + x - y^3 - y = 0, \quad (2,2)$; b) $x^2 + y^2 - 3xy + x = 0, \quad (1,1)$.

○ Zadanie 8.4

Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych podanymi równaniami:

a) $xe^y - y + 1 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 3xy = 0$.

○ Zadanie 8.5

Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanych postaci $y = y(x)$ określonych podanymi równaniami:

a) $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$; b) $(x-y)^2 = y + xy - 3x$.

Odpowiedzi i wskazówki

8.1 a) $M = \left(\frac{2}{3}, 2\right)$; **b)** $a = \sqrt[3]{2V}$, $b = \sqrt[3]{2V}$, $h = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$; **c)** $d_{\min} = 3$; **d)** $a = b = c = 6\,[\mathrm{m}]$; **e*)** trójkąt równoboczny.

8.2 a) i), iii) tak, ii*) nie; **b)** ii), iii) tak, i) nie.

8.3 a) $y = x$; **b)** $y = 1$.

8.4 a) $y' = \dfrac{e^y}{1 - xe^y}$, $y'' = \dfrac{2e^{2y} - xe^{3y}}{(1 - xe^y)^3}$; **b)** $y' = \dfrac{2x - 3y}{3x - 2y}$, $y'' = \dfrac{30xy - 10x^2 - 10y^2}{(3x - 2y)^3}$.

8.5 a) $x_{\max} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $y_{\max} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} - 2$, $x_{\min} = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$, $y_{\min} = \dfrac{-4}{\sqrt{3}} - 2$.

5

CAŁKI PODWÓJNE

Dziewiąty tydzień

Całki podwójne po prostokącie (5.1).

Przykłady

• **Przykład 9.1**

Obliczyć dane całki podwójne po wskazanych prostokątach:

a) $\iint\limits_R y^3 e^{x^2}\, dxdy$, gdzie $R = [0,2] \times [-1,1]$;

b) $\iint\limits_R \frac{x}{y^2}\, dxdy$, gdzie $R = [1,2] \times [4,6]$.

Rozwiązanie

a) Korzystając ze wzoru na zamianę całki podwójnej na całki iterowane otrzymamy

$$\iint\limits_R y^3 e^{x^2}\, dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-1}^1 y^3 e^{x^2}\, dy = \int\limits_0^2 \left[e^{x^2} \cdot \frac{y^4}{4} \right]_{y=-1}^{y=1} dx = \int\limits_0^2 e^{x^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) dx = 0.$$

Uwaga. W przykładzie tym widać, że dobór kolejności całkowania w całkach iterowanych może mieć wpływ na uproszczenie obliczeń. Gdybyśmy w tym przykładzie całkowali w odwrotnej kolejności, to należałoby najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji e^{x^2}, która nie jest funkcją elementarną.

b) Mamy

$$\iint\limits_R \frac{x}{y^2}\, dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_4^6 \frac{x}{y^2}\, dy = \int\limits_1^2 \left[-\frac{x}{y} \right]_{y=4}^{y=6} dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{x}{4} - \frac{x}{6}\right) dx = \frac{1}{12}\int_1^2 x\,dx = \frac{1}{12}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{12}\left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{8}.$$

• Przykład 9.2

Podane całki podwójne zamienić na iloczyny całek pojedynczych:

a) $\iint\limits_R \sin(x-y)\,dxdy$, gdzie $R = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$;

b) $\iint\limits_R \left(\frac{2y^2}{x^3} + \frac{3x}{y}\right) dxdy$, gdzie $R = [1,3] \times [1, e]$.

Rozwiązanie

W zadaniu wykorzystamy liniowość całki oraz wzór na obliczanie całki z funkcji o zmiennych rozdzielonych.

a) Mamy

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R \sin(x-y)\,dxdy &= \iint\limits_R (\sin x\cos y - \cos x \sin y)\,dxdy \\
&= \iint\limits_R \sin x \cos y\,dxdy - \iint\limits_R \cos x \sin y\,dxdy \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos y\,dy\right) - \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin y\,dy\right).
\end{aligned}$$

b) Mamy

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R \left(\frac{2y^2}{x^3} + \frac{3x}{y}\right) dxdy &= 2\iint\limits_R \frac{y^2}{x^3}\,dxdy + 3\iint\limits_R \frac{x}{y}\,dxdy \\
&= 2\left(\int_1^3 \frac{dx}{x^3}\right)\cdot\left(\int_1^e y^2\,dy\right) + 3\left(\int_1^3 x\,dx\right)\cdot\left(\int_1^e \frac{dy}{y}\right).
\end{aligned}$$

• Przykład 9.3

Całkę podwójną

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi o podanych równaniach:

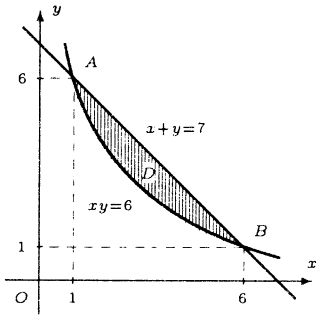
a) $xy = 6,\ x + y = 7$; b) $x = y^2,\ x = \frac{y^2}{2} + 1$.

Rozwiązanie

a) Obszar całkowania przedstawiono na rysunku. Obszar ten jest normalny tak względem osi Ox jak i osi Oy. Z układu równań

$$xy = 6, \quad x + y = 7$$

wyznaczamy współrzędne punktów $A = (1,6)$, $B = (6,1)$ przecięcia hiperboli $xy = 6$ z prostą $x + y = 7$. Zatem traktując obszar D jako normalny względem osi Ox mamy



$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_1^6 dx \int_{\frac{6}{x}}^{7-x} f(x,y)\,dy.$$

Natomiast, gdy obszar D potraktujemy jako normalny względem osi Oy, to otrzymamy

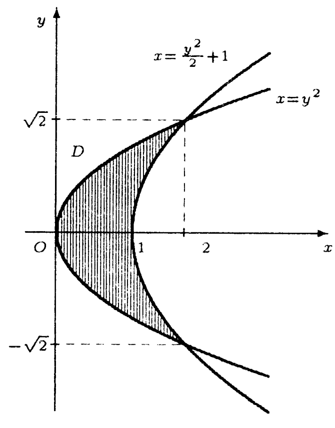
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_1^6 dy \int_{\frac{6}{y}}^{7-y} f(x,y)\,dx.$$

b) Obszar całkowania przedstawiono na rysunku. Jest to obszar normalny tylko względem osi Oy. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = \dfrac{y^2}{2} + 1 \end{cases}$$

otrzymamy punkty przecięcia parabol. Są to punkty $\left(-\sqrt{2}, 2\right)$, $\left(\sqrt{2}, 2\right)$. Obszar D jest opisany zatem przez nierówności:

$$-\sqrt{2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2}, \quad y^2 \leqslant x \leqslant \frac{y^2}{2} + 1.$$



Stąd

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2}^{\frac{y^2}{2}+1} f(x,y)\,dx.$$

Uwaga. Obszar D można podzielić na trzy obszary, z których każdy jest obszarem normalnym względem osi Ox. Dla tego podziału mamy

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{x}}^{-\sqrt{2(x-1)}} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{\sqrt{2(x-1)}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy.$$

Przykład 9.4

Obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

a) $\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dxdy$, gdzie $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$;

b) $\iint\limits_D \max(2x,y)\,dxdy$, gdzie $D = [0,2] \times [0,1]$;

c) $\iint\limits_D E(y)\,dxdy$, gdzie $D = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant \frac{5}{2}\right\}$.

Uwaga. $\max(a,b)$ oznacza większą spośród liczb a, b, natomiast $E(u)$ oznacza część całkowitą liczby u.

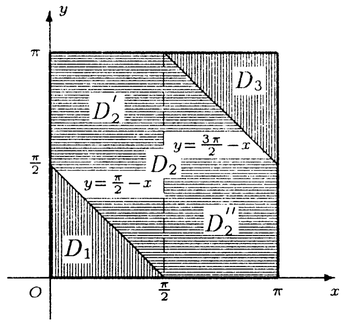
Rozwiązanie

a) Ponieważ

$$|\cos(x+y)| = \begin{cases} \cos(x+y) & \text{dla } 0 \leqslant x+y \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ -\cos(x+y) & \text{dla } \frac{\pi}{2} \leqslant x+y \leqslant \frac{3\pi}{2}, \\ \cos(x+y) & \text{dla } \frac{3\pi}{2} \leqslant x+y \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

więc jeżeli podzielimy obszar D na obszary D_1, D_2, D_3 (rysunek), to mamy

$$\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dxdy = \iint\limits_{D_1} \cos(x+y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (-\cos(x+y))\,dxdy + \iint\limits_{D_3} \cos(x+y)\,dxdy.$$



Licząc teraz kolejno każdą z trzech całek otrzymamy

$$\iint\limits_{D_1} \cos(x+y)\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)\,dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\sin(x+y)\Big]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}-x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}-x\right) - \sin x\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\, dx = \Big[x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$\iint_{D_2} (-\cos(x+y))\, dxdy = \iint_{D_2'} (-\cos(x+y))\, dxdy + \iint_{D_2''} (-\cos(x+y))\, dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi} (-\cos(x+y))\, dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_0^{\frac{3\pi}{2}-x} (-\cos(x+y))\, dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[-\sin(x+y)\Big]_{y=\frac{\pi}{2}-x}^{y=\pi} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Big[-\sin(x+y)\Big]_{y=0}^{y=\frac{3\pi}{2}-x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\sin(x+\pi) - \left(-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\right) dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}-x\right) - (-\sin(x+0))\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 1)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + 1)\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\sin x + 1)\, dx = \Big[x - \cos x\Big]_0^{\pi} = \pi + 2,$$

$$\iint_{D_3} \cos(x+y)\, dxdy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\frac{3\pi}{2}-x}^{\pi} \cos(x+y)\, dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Big[\sin(x+y)\Big]_{y=\frac{3\pi}{2}-x}^{y=\pi} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\sin(x+\pi) - \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}-x\right)\right) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\sin x - (-1))\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1-\sin x)\, dx$$

$$= \Big[x + \cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

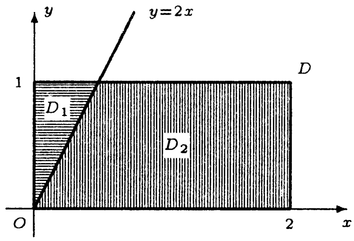
Tak więc

$$\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dxdy = \left(\frac{\pi}{2}-1\right) + (\pi+2) + \left(\frac{\pi}{2}-1\right) = 2\pi.$$

b) Funkcja $\max(2x, y)$ jest określona wzorem

$$\max(2x,y) = \begin{cases} 2x & \text{dla} \quad 2x \geqslant y, \\ y & \text{dla} \quad 2x < y. \end{cases}$$

Prosta $y = 2x$ dzieli obszar całkowania $D = [0,2] \times [0,1]$ na obszary D_1 i D_2 normalne względem osi Oy (zobacz rysunek).



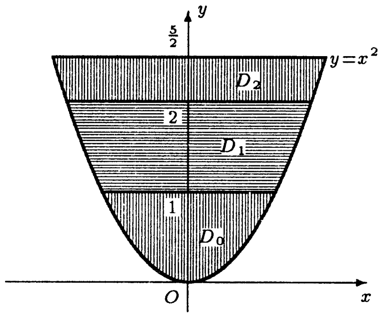
Zatem

$$\iint\limits_D \max(2x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} y\,dxdy + \iint\limits_{D_2} 2x\,dxdy$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} y\,dx + 2\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^2 x\,dx = \int\limits_0^1 \left[xy\right]_{x=0}^{x=\frac{y}{2}} dy + \int\limits_0^1 \left[x^2\right]_{x=\frac{y}{2}}^{x=2} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 y^2\,dy + \int\limits_0^1 \left(4 - \frac{y^2}{4}\right) dy = \left[\frac{y^3}{6}\right]_0^1 + \left[4y - \frac{y^3}{12}\right]_0^1 = \frac{49}{12}.$$

c) Na rysunku przedstawiono obszar całkowania D.



Proste $y = 1$ oraz $y = 2$ dzielą ten obszar na trzy części D_0, D_1, D_2, na których funkcja $E(y)$ przyjmuje odpowiednio wartości 0, 1, 2. Mamy zatem

$$\iint\limits_D E(y)\,dxdy = \iint\limits_{D_0} 0\,dxdy + \iint\limits_{D_1} 1\,dxdy + \iint\limits_{D_2} 2\,dxdy$$

$$= 0 + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx + 2\int\limits_2^{\frac{5}{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx = 2\int\limits_1^2 \sqrt{y}\,dy + 4\int\limits_2^{\frac{5}{2}} \sqrt{y}\,dy$$

$$= \frac{4}{3}\left[\sqrt{y^3}\right]_1^2 + \frac{8}{3}\left[\sqrt{y^3}\right]_2^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{3}\left[2\sqrt{2} - 1\right] + \frac{8}{3}\left[\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} - 2\sqrt{2}\right]$$

$$= \frac{10\sqrt{10} - 8\sqrt{2} - 4}{3}.$$

Zadania

○ Zadanie 9.1

Obliczyć dane całki podwójne po wskazanych prostokątach:

a) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, gdzie $R = [0,2] \times [0,1]$;

b) $\displaystyle\iint\limits_R x \sin xy\,dxdy$, gdzie $R = [0,1] \times [\pi, 2\pi]$.

○ Zadanie 9.2

Podane całki podwójne zamienić na sumy iloczynów całek pojedynczych:

a) $\displaystyle\iint\limits_R e^{x-y}\,dxdy$, gdzie $R = [-1,1] \times [-1,1]$;

b) $\displaystyle\iint\limits_R xy \ln \frac{x}{y}\,dxdy$, gdzie $R = [1,e] \times [1,2]$.

○ Zadanie 9.3

Całkę podwójną $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi o równaniach:

a) $x^2 + y = 2, \quad y^3 = x^2$;

b) $x^2 + y^2 = 4, \quad y = 2x - x^2, \quad x = 0 \ (x, y \geqslant 0)$;

c) $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 51 = 0$.

○ Zadanie 9.4

Obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

a) $\iint\limits_D \min(x,y)\,dxdy$, gdzie $D=[0,1]\times[0,2]$;

b) $\iint\limits_D E(x+y)\,dxdy$, gdzie $D=[0,2]\times[0,2]$;

c) $\iint\limits_D |x-y|\,dxdy$, gdzie $D=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 : x\geqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant 3-2x\right\}$.

Uwaga. $\min(a,b)$ oznacza mniejszą spośród liczb a, b, natomiast $E(u)$ oznacza część całkowitą liczby u.

Odpowiedzi i wskazówki

9.1 a) $\frac{5}{24}$; **b)** 0.

9.2 a) $\left(\int\limits_{-1}^{1} e^x\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_{-1}^{1} e^{-y}\,dy\right)$;

b) $\left(\int\limits_{1}^{e} x\ln x\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_{1}^{2} y\,dy\right)-\left(\int\limits_{1}^{e} x\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_{1}^{2} y\ln y\,dy\right)$.

9.3 a) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x^2}}^{2-x^2} f(x,y)\,dy$; **b)** $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2x-x^2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$; **c)** $\int\limits_{-6}^{10} dx \int\limits_{-3-\sqrt{64-(x-2)^2}}^{-3+\sqrt{64-(x-2)^2}} f(x,y)\,dy$.

9.4 a) $\frac{5}{6}$; **b)** 6; **c)** $\frac{15}{8}$.

Dziesiąty tydzień

Całki podwójne po obszarach normalnych (5.2). Zamiana zmiennych w całkach podwójnych (5.3). Współrzędne biegunowe w całkach podwójnych (5.4)

Przykłady

• Przykład 10.1

W podanych całkach iterowanych zmienić kolejność całkowania:

a) $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)\,dx$; b) $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{\sin x}^{2} f(x,y)\,dy$; c) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{|x|} f(x,y)\,dy$.

Rozwiązanie

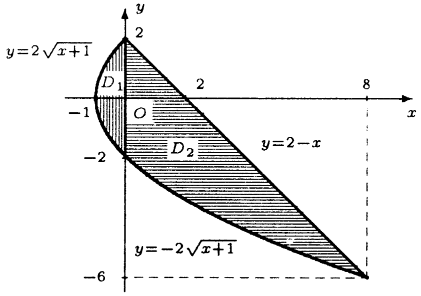
a) Obszar całkowania D określony jest nierównościami

$$-6 \leqslant y \leqslant 2, \qquad \frac{y^2}{4} - 1 \leqslant x \leqslant 2 - y.$$

Aby zmienić kolejność całkowania w danej całce należy obszar D podzielić na dwa obszary D_1, D_2 (zobacz rysunek) normalne względem osi Ox, gdzie

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : \ -1 \leqslant x \leqslant 0, \ -2\sqrt{x+1} \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x+1}\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : \ 0 \leqslant x \leqslant 8, \ -2\sqrt{x+1} \leqslant y \leqslant 2 - x\right\}.$$



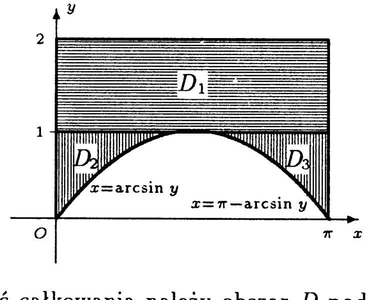
Wtedy mamy

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-2\sqrt{x+1}}^{2\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{0}^{8} dx \int\limits_{-2\sqrt{x+1}}^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

b) Obszar całkowania D określony jest nierównościami

$$0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad \sin x \leqslant y \leqslant 2.$$



Aby zatem zmienić kolejność całkowania należy obszar D podzielić na trzy obszary D_1, D_2, D_3 (zobacz rysunek) normalne względem osi Oy, gdzie

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : \ 1 \leqslant y \leqslant 2, \ 0 \leqslant x \leqslant \pi\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \ 0 \leqslant x \leqslant \arcsin y\right\},$$

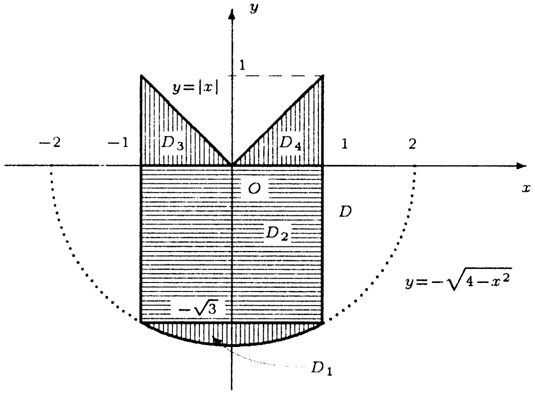
$$D_3 = \left\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \ \pi - \arcsin y \leqslant x \leqslant \pi\right\}.$$

Wtedy

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\pi} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\pi-\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,dx.$$

c) Obszar całkowania przedstawiono na rysunku.



Aby zmienić kolejność całkowania dzielimy obszar D na cztery obszary normalne względem osi Oy :

$$D_1 = \left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 : -2 \leqslant y \leqslant -\sqrt{3},\ -\sqrt{4-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{4-y^2}\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 : -\sqrt{3} \leqslant y \leqslant 0,\ -1 \leqslant x \leqslant 1\right\},$$

$$D_3 = \left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 1,\ -1 \leqslant x \leqslant -y\right\},$$

$$D_4 = \left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 1,\ y \leqslant x \leqslant 1\right\}.$$

Zatem

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_3} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_4} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dy \int\limits_{-1}^{1} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1}^{-y} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)\,dx.$$

- **Przykład 10.2**

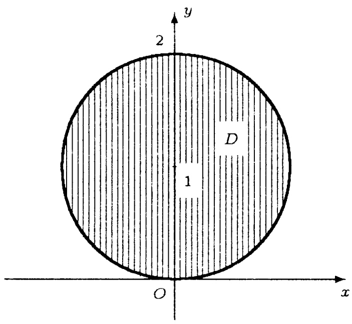
Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

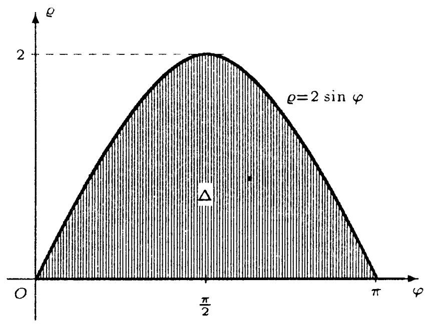
a) $\displaystyle\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy$, gdzie $D:\ x^2+y^2-2y \leqslant 0$;

b) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(1-x^2-y^2\right)^2}$, gdzie $D:\ x^2+y^2 \leqslant x,\ x^2+y^2 \leqslant y$.

Rozwiązanie

a) Równanie okręgu $x^2+y^2-2y=0$ we współrzędnych biegunowych ($x=\varrho\cos\varphi, y=\varrho\sin\varphi$) ma postać $\varrho^2-2\varrho\sin\varphi=0$, czyli po uproszczeniu $\varrho=2\sin\varphi$. Zatem obszar całkowania Δ (zobacz rysunek) w nowych zmiennych określony jest nierównościami $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $0\leqslant\varrho\leqslant 2\sin\varphi$. Tak więc, wobec wzoru na zamianę zmiennych w całce podwójnej, mamy





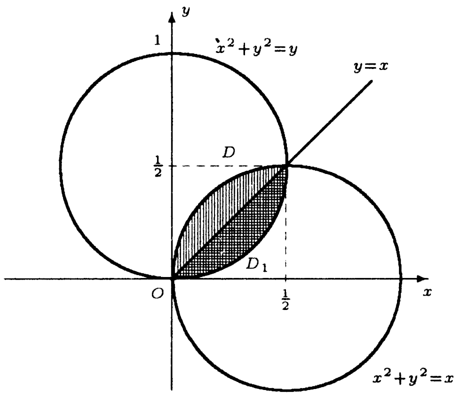
$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy = \iint\limits_\Delta \varrho^2\cdot\varrho\,d\varphi d\varrho = \int\limits_0^\pi d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \varrho^3\,d\varrho = \int\limits_0^\pi \left[\frac{1}{4}\varrho^4\right]_{\varrho=0}^{\varrho=2\sin\varphi} d\varphi$$

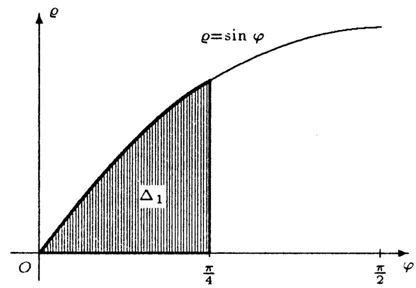
$$= 4\int\limits_0^\pi \sin^4\varphi\,d\varphi = 4\left[\frac{3}{8}\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi+\frac{1}{32}\sin 4\varphi\right]_0^\pi = \frac{3}{2}\pi.$$

b) Obszar całkowania przedstawiono na rysunku poniżej. Ze względu na symetrię obszaru D względem prostej $y=x$, a także ze względu na symetrię funkcji podcałkowej względem tej prostej, mamy

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(1-x^2-y^2\right)^2} = 2\iint\limits_{D_1} \frac{dxdy}{\left(1-x^2-y^2\right)^2},$$

gdzie D_1 jest połową obszaru D. Obszar D_1 we współrzędnych biegunowych (na kolejnym rysunku jest to obszar Δ_1) jest opisany przez nierówności: $0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$, $0\leqslant\varrho\leqslant\sin\varphi$. Stąd dokonując w całce zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe otrzymamy





$$2\iint\limits_{D_1}\frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^2}=2\iint\limits_{\Delta_1}\frac{\varrho\,d\varphi\,d\varrho}{(1-\varrho^2)^2}=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{\sin\varphi}\frac{\varrho\,d\varrho}{(1-\varrho^2)^2}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{1-\varrho^2}\right]_{\varrho=0}^{\varrho=\sin\varphi}d\varphi$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-1\right)d\varphi=\Big[\operatorname{tg}\varphi-\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}.$$

• Przykład 10.3

Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych obszarach:

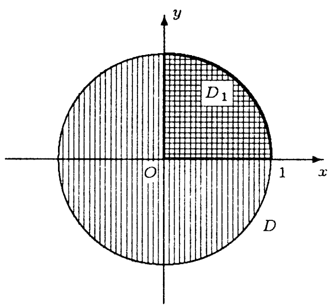
a) $f(x,y)=|xy|$, gdzie $D:\ x^2+y^2\leqslant 1$;

b) $f(x,y)=x^2+y^2$, gdzie $D:\ x\leqslant y\leqslant x+2,\ 2\leqslant x\leqslant 3$.

Rozwiązanie

Wartość średnia funkcji f na obszarze D wyraża się wzorem:

$$f_{\text{śr}}=\frac{1}{|D|}\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy.$$



a) W tym przypadku wystarczy obliczyć całkę podwójną

$$\iint\limits_D |xy|\,dx\,dy,\quad \text{gdyż}\quad |D|=\pi.$$

Funkcja $f(x,y)=|xy|$ spełnia warunki $f(x,y)=f(-x,y)=f(-x,-y)=f(x,-y)$. Stąd oraz z symetryczności obszaru całkowania wynika, że

$$\iint\limits_D |xy|\,dx\,dy=4\iint\limits_{D_1}|xy|\,dx\,dy=4\iint\limits_{D_1}xy\,dx\,dy,$$

gdzie D_1 oznacza pierwszą ćwiartkę koła D (zobacz rysunek). Obszar D_1 we współrzędnych biegunowych określony jest nierównościami

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 1.$$

Zatem po dokonaniu w obliczanej całce zamiany na współrzędne biegunowe otrzymamy

$$\iint\limits_{D_1} xy\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 (\varrho\cos\varphi)(\varrho\sin\varphi)\cdot\varrho\,d\varrho$$

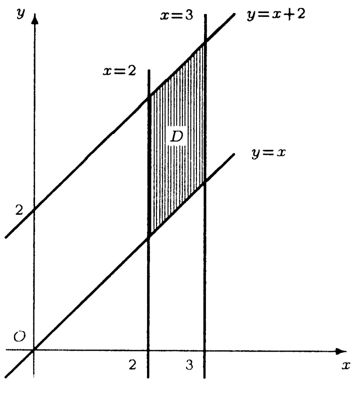
$$= \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^1 \varrho^3\,d\varrho\right) = \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^1 \varrho^3\,d\varrho\right) =$$

$$= \left[-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{1}{4}\varrho^4\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Wracając do wartości średniej otrzymamy

$$f_{\text{śr}} = \frac{1}{|D|}\iint\limits_D |xy|\,dxdy = 4\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2\pi}.$$

b) Wyznaczymy najpierw pole obszaru D (zobacz rysunek).



Mamy

$$|D| = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{x+2} dy = \int\limits_2^3 \big[y\big]_{y=x}^{y=x+2} dx = 2\int\limits_2^3 dy = 2.$$

Następnie obliczymy całkę z funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2$ po obszarze D. Mamy zatem

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{x+2} \left(x^2+y^2\right)dy = \int\limits_2^3 \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x}^{y=x+2} dx$$

$$= \frac{4}{3}\left[x^3 + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_2^3 = 38.$$

Tak więc wartość średnia funkcji f na obszarze D jest równa $f_{śr} = \frac{1}{2} \cdot 38 = 19$.

Przykład 10.4

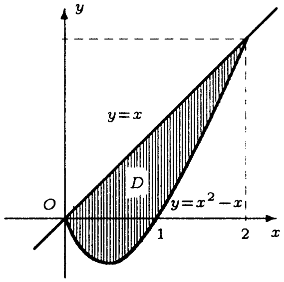
Obliczyć pola obszarów ograniczonych podanymi krzywymi:

a) $y = x^2 - x, \quad y = x$;

b) $y = e^x, \quad y = \ln x, \quad x + y = 1, \quad x = 2$.

Rozwiązanie

a) Obszar D, którego pole mamy obliczyć, zaznaczono na rysunku.

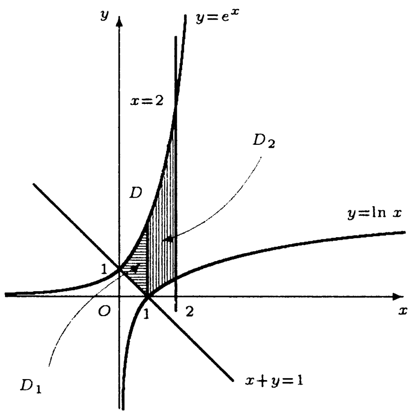


Zatem

$$|D| = \iint_D dxdy = \int_0^2 dx \int_{x^2-x}^{x} dy = \int_0^2 \left[y\right]_{y=x^2-x}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^2 \left(x - \left(x^2 - x\right)\right) dx = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = \left[2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

b) Obszar D jest wprawdzie obszarem normalnym zarówno względem osi Ox i Oy, jednakże funkcji ograniczających ten obszar tak z góry jak i z dołu nie da się zapisać jednym wzorem. Dlatego podzielimy go prostą na obszary D_1 i D_2 (zobacz rysunek).



Mamy teraz

$$
\begin{aligned}
|D| &= |D_1| + |D_2| = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy \\
&= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{e^x} dy + \int_1^2 dx \int_{\ln x}^{e^x} dy = \int_0^1 \left[y\right]_{y=1-x}^{y=e^x} dx + \int_1^2 \left[y\right]_{y=\ln x}^{y=e^x} dx \\
&= \int_0^1 (e^x + x - 1)\, dx + \int_1^2 (e^x - \ln x)\, dx = \left[e^x + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + \left[e^x - x(\ln x - 1)\right]_1^2 \\
&= e^2 + \frac{1}{2} - \ln 4.
\end{aligned}
$$

• Przykład 10.5

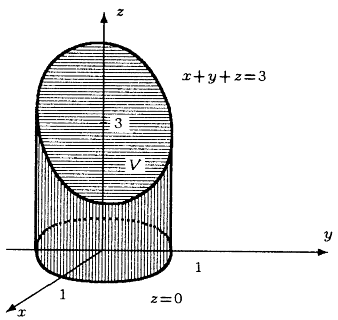
Obliczyć objętości brył ograniczonych podanymi powierzchniami:

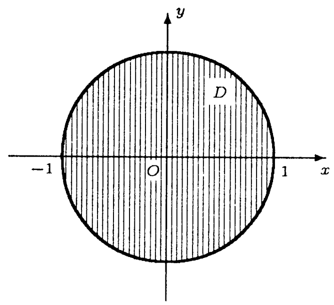
a) $x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 3,\ z = 0;$

b) $x = 0,\ x = 1 - |y|,\ z = 0,\ z = 10 - 5x - 2y.$

Rozwiązanie

a) Na rysunkach poniżej przedstawiono obszar U, którego objętość $|U|$ mamy obliczyć oraz rzut tego obszaru na płaszczyznę xOy.





Zatem wobec tych rysunków i interpretacji całki podwójnej jako objętości, mamy

$$|U| = \iint\limits_D (3 - x - y)\ dxdy.$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe, obszar D możemy zapisać w postaci

$$\{(\varphi, \varrho) :\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \varrho \leqslant 1\}.$$

Dokonując teraz zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe mamy

$$\iint\limits_D (3 - x - y)\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (3 - \varrho\cos\varphi - \varrho\sin\varphi)\varrho\, d\varrho$$

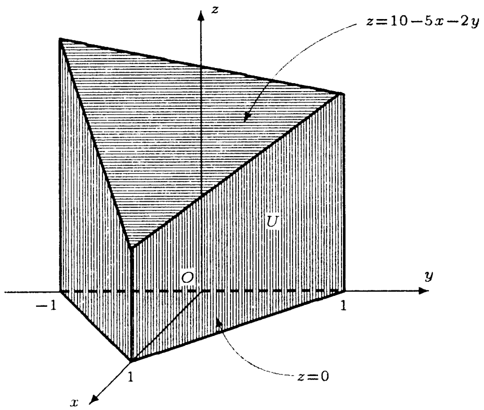
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(3\varrho - \varrho^2 \cos\varphi - \varrho^2 \sin\varphi\right) d\varrho$$

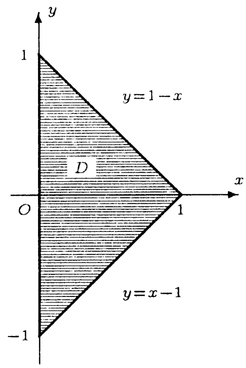
$$= \int_0^{2\pi} \left[3 \cdot \frac{1}{2}\varrho^2 - \frac{1}{3}\varrho^3 \cos\varphi - \frac{1}{3}\varrho^3 \sin\varphi\right]_{\varrho=0}^{\varrho=1} d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\cos\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi\right) d\varphi = \left[\frac{3}{2}\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi + \frac{1}{3}\cos\varphi\right]_0^{2\pi}$$

$$= \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi - \frac{1}{3}\sin 2\pi + \frac{1}{3}\cos 2\pi\right) - \left(-\frac{1}{3}\sin 0 + \frac{1}{3}\cos 0\right) = 3\pi.$$

b) Na rysunkach poniżej przedstawiono bryłę U oraz jej rzut na płaszczyznę xOy.





Objętość bryły U obliczmy korzystając ze wzoru

$$|U| = \iint_D \left(g(x,y) - d(x,y)\right) dxdy,$$

gdzie $z = d(x,y)$ i $z = g(x,y)$ są odpowiednio dolną i górną powierzchnią ograniczającą tę bryłę, a D jest jej rzutem na płaszczyznę xOy. Stąd mamy

$$|U| = \iint_D \left((10 - 5x - 2y) - 0\right) dxdy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} (10 - 5x - 2y)\, dy = \int_0^1 \left[10y - 5xy - y^2\right]_{y=x-1}^{y=1-x} dx$$

$$= 10 \int_0^1 \left(x^2 - 3x + 2\right) dx = 10 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{25}{3}.$$

Zadania

○ Zadanie 10.1

W podanych całkach iterowanych zmienić kolejność całkowania:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{|x|} f(x,y)\, dy$; b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)\, dy$;

c) $\displaystyle\int_{0}^{4} dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\, dy$; d) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)\, dx$.

○ Zadanie 10.2

Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć dane całki podwójne po wskazanych obszarach:

a) $\displaystyle\iint\limits_D xy\, dxdy$, gdzie $D:\ x \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$;

b) $\displaystyle\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right) dxdy$, gdzie $D:\ y \geqslant 0,\ y \leqslant x^2+y^2 \leqslant x$;

c*) $\displaystyle\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, gdzie $D:\ x \geqslant 0,\ \left(x^2+y^2\right)^2 \leqslant 4\left(x^2-y^2\right)$.

○ Zadanie 10.3

Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych obszarach:

a) $f(x,y) = \sin x \cos y$, gdzie $D = [0,\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

b) $f(x,y) = x + y$, gdzie $D:\ 0 \leqslant y \leqslant \pi,\ 0 \leqslant x \leqslant \sin y$.

○ Zadanie 10.4

Obliczyć pola obszarów ograniczonych podanymi krzywymi:

a) $y^2 = 4x, \quad x + y = 3, \quad y = 0\ (y \geqslant 0)$;

b) $x^2 + y^2 - 2y = 0, \quad x^2 + y^2 - 4y = 0$;

c) $x + y = 4, \quad x + y = 8, \quad x - 3y = 0, \quad x - 3y = 5$.

○ Zadanie 10.5

Obliczyć objętości brył ograniczonych podanymi powierzchniami:

a) $x^2 + y^2 - 2y = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0$; b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$;

c*) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, \quad z = xy, \quad z = 0$; d*) $2z = x^2 + y^2, \quad y + z = 4$.

Odpowiedzi i wskazówki

10.1 a) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1}^{-y} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)\,dx$; **b)** $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$;

c) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^2 dy \int\limits_{2+\sqrt{4-y^2}}^4 f(x,y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}}^4 f(x,y)\,dx$;

d) $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x+1}}^{-\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+1}} f(x,y)\,dy$.

10.2 a) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_1^{\sqrt{2}} \varrho^3 \sin\varphi\cos\varphi\,d\varrho = 0$; **b)** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{\cos\varphi} \varrho^3\,d\varrho = \frac{1}{8}$;

c*) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{\cos 2\varphi}} \varrho^3 \cos\varphi\,d\varrho = \frac{32\sqrt{2}}{15}$.

10.3 a) $f_{\text{śr}} = \frac{4}{\pi^2}$; **b)** $f_{\text{śr}} = \frac{5\pi}{8}$.

10.4 a) $\frac{10}{3}$; **b)** 3π; **c)** 5.

10.5 a) $\frac{3\pi}{2}$; **b)** $\frac{4}{3}\pi$; **c*)** π. Wskazówka. Zastosować przesunięte współrzędne biegunowe: $x = 1 + \varrho\cos\varphi$, $y = 1 + \varrho\sin\varphi$, $J = \varrho$; **d*)** $\frac{81}{4}\pi$.

Jedenasty tydzień

Zastosowania całek podwójnych (5.6).

Przykłady

- **Przykład 11.1**

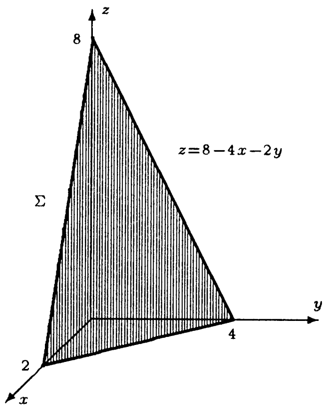
Obliczyć pola powierzchni płatów określonych podanymi równaniami:

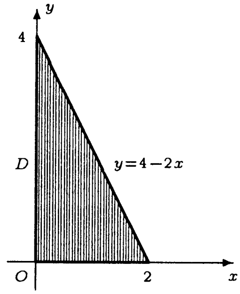
a) $z = 8 - 4x - 2y$, gdzie $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$;

b) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, gdzie $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

Rozwiązanie

a) Płat Σ, którego pole mamy obliczyć oraz jego rzut D na płaszczyznę xOy przedstawiono na rysunkach.





Ponieważ funkcja $f(x,y) = 8 - 4x - 2y$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na obszarze D, więc możemy stosować wzór na pole płata. Mamy zatem

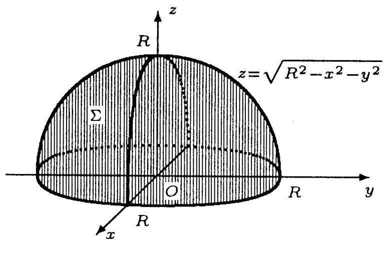
$$|\Sigma| = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} \sqrt{1 + (-4)^2 + (-2)^2}\, dy$$

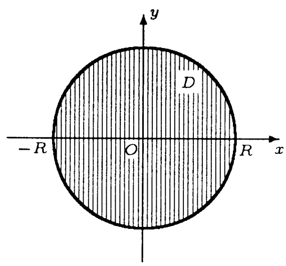
$$= \sqrt{21} \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} dy = \sqrt{21} \int\limits_0^2 \left[y\right]_{y=0}^{y=4-2x} dx = \sqrt{21} \int\limits_0^2 (4 - 2x)\, dx$$

$$= \sqrt{21}\left[4x - x^2\right]_0^2 = 4\sqrt{21}.$$

Tak więc pole płata Σ jest równe $4\sqrt{21}$.

b) Płat Σ (górna półsfera), którego pole mamy obliczyć oraz jego rzut D na płaszczyznę xOy przedstawiono na rysunkach.





Pole płata Σ wyraża się wzorem

$$|\Sigma| = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2}\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}\, dxdy$$
$$= \iint\limits_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\, dxdy.$$

Wprowadzając współrzędne biegunowe, obszar całkowania możemy zapisać w postaci

$$\{(\varphi, \varrho): \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varrho \leqslant R\}.$$

Tak więc po zamianie zmiennych w obliczanej całce podwójnej otrzymamy

$$\iint\limits_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-(\varrho\cos\varphi)^2-(\varrho\sin\varphi)^2}} \cdot \varrho\, d\varrho$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{R\varrho}{\sqrt{R^2-\varrho^2}}\, d\varrho = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^R \frac{R\varrho}{\sqrt{R^2-\varrho^2}}\, d\varrho\right)$$
$$= [\varphi]_0^{2\pi} \left[-R\sqrt{R^2-\varrho^2}\right]_0^R = 2\pi R^2.$$

Pole połowy sfery o promieniu R jest równe $2\pi R^2$.

• Przykład 11.2

Obliczyć masy podanych obszarów o wskazanych gęstościach powierzchniowych:
a) $D = [0,a] \times [0,a]$, gdzie $a > 0$, $\sigma(x,y) = x^2 + y^2$;

b) $D = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 : 2y^2 \leqslant x \leqslant 3 + y^2\}$, gdzie $\sigma(x,y) = |y|$.

Rozwiązanie
Masę M obszaru D o gęstości powierzchniowej $\sigma = \sigma(x,y)$ obliczamy ze wzoru

$$M = \iint\limits_D \sigma(x,y)\, dxdy.$$

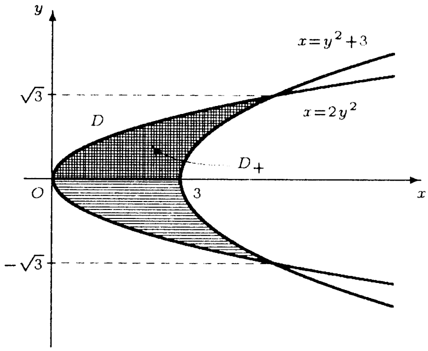
a) W tym przypadku mamy

$$M = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right) dxdy = \int_0^a dx \int_0^a \left(x^2+y^2\right) dy$$
$$= \int_0^a \left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=a} dx$$
$$= \int_0^a \left(ax^2 + \frac{1}{3}a^3\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{3}a^3 x\right]_0^a = \frac{1}{3}a^4 + \frac{1}{3}a^4 = \frac{2}{3}a^4.$$

b) Obszar D, którego masę mamy obliczyć, przedstwiono na rysunku. Ze względu na symetrię obszaru D i gęstości σ względem prostej $y = 0$ wystarczy obliczyć masę obszaru

$$\left\{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3},\ 2y^2 \leqslant x \leqslant y^2 + 3\right\},$$

który oznaczymy przez D_+. Mamy



$$
\begin{aligned}
M &= 2\iint\limits_{D_+} |y|\,dxdy = 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{2y^2}^{y^2+3} y\,dx \\
&= 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} \left[yx\right]_{x=2y^2}^{x=y^2+3} dy \\
&= 2\int\limits_0^{\sqrt{3}} y\left(3 - y^2\right) dy = 2\left[\frac{3y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

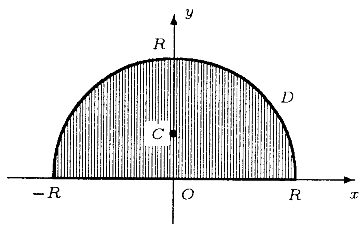
• Przykład 11.3

Znaleźć położenia środków masy podanych obszarów jednorodnych:

a) półkole D o promieniu R; b) $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : y \geqslant \dfrac{x^2}{4},\ x \geqslant \dfrac{y^2}{4}\right\}$.

Rozwiązanie

a) Ponieważ obszar D (półkole) jest jednorodny oraz ma oś symetrii, więc jego środek masy leży na tej osi. Niech półkole D będzie położone w układzie współrzędnych jak na rysunku. Wtedy oczywiście $x_C = 0$. Przyjmując, że gęstość powierzchniowa masy $\sigma(x, y) = \sigma_0 = 1$, wtedy dla współrzędnej y_C jej środka otrzymamy



$$y_C = \frac{\iint\limits_D y\sigma(x, y)\,dxdy}{\iint\limits_D \sigma(x, y)\,dxdy} = \frac{\iint\limits_D y\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy}$$

$$= \frac{\iint\limits_D y\,dxdy}{|D|} = \frac{\iint\limits_D y\,dxdy}{\dfrac{\pi R^2}{2}} = \frac{2}{\pi R^2}\iint\limits_D y\,dxdy.$$

Aby obliczyć ostatnią całkę dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Półkole D w tych współrzędnych jest opisane nierównościami $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varrho \leqslant R$.

Mamy więc

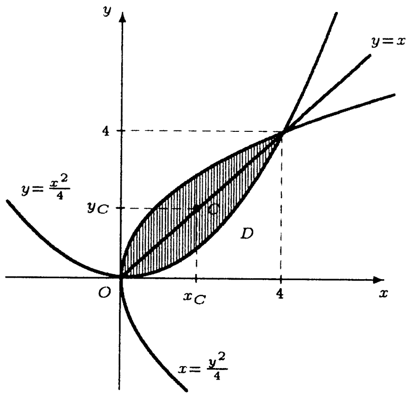
$$\iint\limits_D y\,dxdy = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} (\varrho \sin\varphi)\cdot \varrho\,d\varrho = \left(\int\limits_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^{R} \varrho^2\,d\varrho\right)$$

$$= \Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{1}{3}\varrho^3\right]_0^{R} = [-\cos\pi-(-\cos 0)]\cdot\frac{1}{3}R^3 = \frac{2}{3}R^3.$$

Zatem współrzędne środka masy półkola dane są wzorami

$$x_C = 0,\quad y_C = \frac{4R}{3\pi}.$$

b) Obszar D, którego położenie środka masy mamy wyznaczyć, przedstawiono na rysunku.



Ponieważ obszar ten jest jednorodny i prosta $y = x$ jest jego osią symetrii, więc środek C masy należy do prostej $y = x$. Stąd $x_C = y_C$. Wystarczy zatem obliczyć jedną ze współrzędnych tego środka. Mamy

$$x_C = \frac{\iint\limits_D x\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy} = \frac{\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} x\,dy}{\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} dy} = \frac{\int\limits_0^4 \Big[xy\Big]_{y=\frac{x^2}{2}}^{y=2\sqrt{x}} dx}{\int\limits_0^4 \Big[y\Big]_{y=\frac{x^2}{2}}^{y=2\sqrt{x}} dx}$$

$$= \frac{\int\limits_0^4 \left(2x\sqrt{x}-\frac{x^3}{4}\right)dx}{\int\limits_0^4 \left(2\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\right)dx} = \frac{\left[\frac{4}{5}\sqrt{x^5}-\frac{x^4}{16}\right]_0^4}{\left[\frac{4}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^3}{12}\right]_0^4} = \frac{9}{5}.$$

Zatem współrzędne środka masy mają współrzędne $x_C = y_C = \dfrac{9}{5}$.

- **Przykład 11.4**

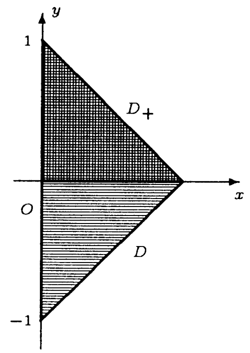
Obliczyć momenty bezwładności podanych obszarów względem wskazanych osi:

a) trójkąt o wierzchołkach $(0,-1)$, $(0,1)$, $(1,0)$ względem osi Ox i gęstości powierzchniowej masy $\sigma(x,y)=x$.

b) ćwiartka D jednorodnego koła o promieniu R, względem osi symetrii (przyjąć $\sigma(x,y)=1$);

Rozwiązanie

a) Obszar D, którego moment bezwładności mamy obliczyć, przedstawiono na rysunku. Zauważmy najpierw, że obszar D jest symetryczny względem osi Ox. Zauważmy ponadto, że funkcja $f(x,y)=y^2\sigma(x,y)=xy^2$ także jest symetryczna względem tej osi, tj. spełnia warunek $f(x,-y)=f(x,y)$. Ze spostrzeżeń tych wynika, że moment bezwładności obszaru D jest dwukrotnie większy od momentu bezwładności górnej połowy tego obszaru tj. obszaru



$$D_+=\{(x,y):\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 1-y\}.$$

normalnego względem osi Oy. Mamy zatem

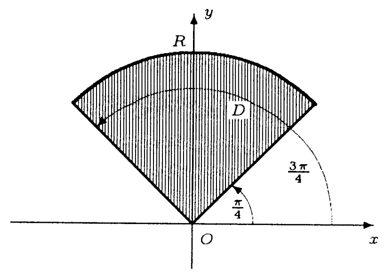
$$I_x=\iint\limits_{D_+} y^2\sigma(x,y)\,dxdy=2\iint\limits_{D_+} xy^2\,dxdy$$

$$=2\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-y} xy^2\,dx=2\int\limits_0^1 y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1-y}dy=$$

$$=\int\limits_0^1 y^2(1-y)^2\,dy=\left[\frac{y^5}{5}-\frac{y^4}{2}+\frac{y^2}{3}\right]_0^1=\frac{1}{30}.$$

b) Niech ćwiartka koła będzie położona jak na rysunku. Moment bezwładności obszaru D względem osi Oy wyraża się wzorem

$$I_y=\iint\limits_D x^2\sigma(x,y)\,dxdy.$$



Dla obszaru rozważanego w zadaniu mamy

$$I_y=\iint\limits_D x^2\,dxdy.$$

Obszar D jest określony we współrzędnych biegunowych przez nierówności

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant R.$$

Dokonując w całce zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe otrzymamy

$$\begin{aligned}
I_y &= \iint\limits_D x^2\,dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^R \varrho^2 \cos^2\varphi \cdot \varrho\,d\varrho = \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos^2\varphi\,d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_0^R \varrho^3\,d\varrho\right) \\
&= \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^R = \left[\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right)\right] \cdot \frac{R^4}{4} \\
&= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\frac{R^4}{4} = \frac{(\pi - 2)R^4}{16}.
\end{aligned}$$

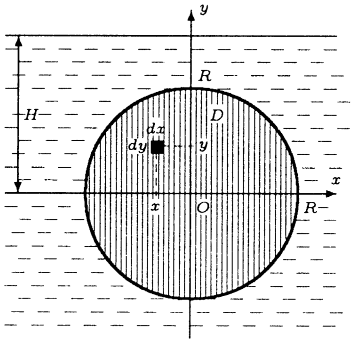
• Przykład 11.5

Obliczyć parcie wywierane przez wodę na jedną stronę płyty w kształcie koła o promieniu $R = 10$ m. Koło jest zanurzone pionowo w wodzie, a jego środek znajduje się na głębokości $H = 25$ m.

Rozwiązanie

Niech płyta D będzie położona względem układu współrzędnych jak na rysunku. Parcie wywierane przez wodę na element $dxdy$ płyty o współrzędnych (x, y) wyraża się wzorem $\gamma(H - y)\,dxdy$, gdzie γ oznacza ciężar właściwy wody. Zatem całkowite parcie wody na jedną stronę płyty można obliczyć ze wzoru

$$P = \gamma \iint\limits_D (H - y)\,dxdy.$$



Całkę tę obliczymy dokonując zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe. Obszar D w tych współrzędnych jest określony przez nierówności $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varrho \leqslant R$. Zatem

$$\begin{aligned}
P &= \gamma \iint\limits_D (H - y)\,dxdy = \gamma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R (H - \varrho\sin\varphi) \cdot \varrho\,d\varrho \\
&= \gamma \left\{ H \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right) \left(\int\limits_0^R \varrho\,d\varrho\right) - \left(\int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi\,d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_0^R \varrho^2\,d\varrho\right)\right\} \\
&= \gamma \left\{ H\,[\varphi]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^R - [-\cos\varphi]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^R \right\} = \gamma \left\{ H \cdot 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} - 0 \cdot \frac{R^3}{3} \right\} = \gamma\pi R^2 H.
\end{aligned}$$

Po wstawieniu danych $\gamma = 9{,}81 \cdot 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$, $R = 10$ m, $H = 25$ m otrzymamy $7{,}70 \cdot 10^7$ N.

Zadania

○ **Zadanie 11.1**

Obliczyć pola podanych płatów:

a) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 - Rx \leqslant 0$, $z \geqslant 0$;

c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leqslant z \leqslant 2$;

d*) Satelita telekomunikacyjny jest umieszczony na orbicie geostacjonarnej położonej w odległości $h = 400$ km od powierzchni Ziemi. Obliczyć pole obszaru objętego zasięgiem tego satelity. Przyjąć, że promień Ziemi jest równy $R = 6400$ km.

○ **Zadanie 11.2**

Obliczyć masy podanych obszarów o wskazanych gęstościach powierzchniowych:

a) $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin x\right\}$, gdzie $\sigma(x, y) = x$;

b) $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0\right\}$, gdzie $\sigma(x, y) = |x|$.

○ **Zadanie 11.3**

Znaleźć położenia środków masy podanych obszarów jednorodnych, gdzie:

a) D — trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości h;

b) $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin^2 x\right\}$.

○ **Zadanie 11.4**

Obliczyć momenty bezwładności podanych obszarów względem wskazanych osi:

a) D – kwadrat jednorodny o boku a, moment obliczyć względem przekątnej, przyjąć $\sigma(x, y) = 1$;

b) $D = \left\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ y \geqslant 0\right\}$, moment obliczyć względem osi Ox, przyjąć $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

○ **Zadanie 11.5**

Obliczyć parcie wody na płytę zasuwy turbiny elektrowni wodnej. Zasuwa jest ustawiona pionowo i ma kształt kwadratu o boku $a = 1$ m. Górna krawędź tej zasuwy jest pozioma i znajduje się $H = 5$ m pod poziomem wody.

Odpowiedzi i wskazówki

11.1 a) $|\Sigma| = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$; **b)** $|\Sigma| = R^2(\pi - 2)$; **c)** $|\Sigma| = 3\pi\sqrt{2}$;

d*) $|\Sigma| = 2\pi R^2 \dfrac{h}{R + h} \approx 15\,138\,780\ \left[\mathrm{km}^2\right]$.

11.2 a) $M = \pi$; **b)** $M = \dfrac{14}{3}$.

11.3 a) środek masy leży na osi symetrii trójkąta w odległości $\dfrac{h}{3}$ od podstawy;

b) $x_C = \frac{\pi}{2}$ (z symetrii), $y_C = \frac{3}{8}$.

11.4 a) $I = \frac{1}{12}a^4$; **b)** $I_x = \frac{\pi}{10}R^5$.

11.5 $P = 18\,810$ [N].

6

CAŁKI POTRÓJNE

Dwunasty tydzień

Całki potrójne po prostopadłościanie (6.1). Całki potrójne po obszarach normalnych (6.2).

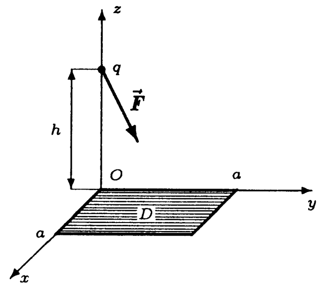
Przykłady

• Przykład 12.1

Obliczyć siłę, z jaką jest przyciągany ładunek punktowy q przez ładunek Q rozłożony równomiernie na kwadracie o boku a. Ładunek punktowy jest położony na wysokości h nad jednym z wierzchołków kwadratu.

Rozwiązanie

Niech naładowany ładunkiem kwadrat oraz ładunek punktowy będą położone względem układu współrzędnych jak na rysunku. Z symetrii położenia wynika, że współrzędne F_x i F_y siły $\vec{F}$, z jaką kwadrat przyciąga ładunek punktowy, spełniają warunek $F_x = F_y$. Wystarczy zatem obliczyć tylko współrzędne F_x i F_z. Współrzędne te wyrażają się wzorami



$$F_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_D \frac{(x-x_0)\,\sigma(x,y)\,dxdy}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad F_z = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_D \frac{z_0\sigma(x,y)\,dxdy}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

W naszym przypadku gęstość ładunku wynosi $\sigma(x,y) = \sigma_0 = \dfrac{Q}{a^2}$, a punkt, w którym umieszczono ładunek punktowy ma współrzędne $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, h)$. Zatem

$$F_x = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\iint\limits_D \frac{x\,dxdy}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\int\limits_0^a dy\int\limits_0^a \frac{x\,dx}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\int\limits_0^a \left[\frac{-1}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{x=0}^{x=a} dy = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\int\limits_0^a \left(\frac{1}{(y^2+h^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(y^2+a^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}\right) dy$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left\{\left[\ln\left|y+\sqrt{y^2+h^2}\right|\right]_0^a - \left[\ln\left|y+\sqrt{y^2+a^2+h^2}\right|\right]_0^a\right\}$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left\{\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{a+\sqrt{2a^2+h^2}} - \ln\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right\}$$

Podobnie

$$F_z = \frac{-qQh}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-qQh}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\int\limits_0^a dx\int\limits_0^a \frac{dy}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-qQh}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\int\limits_0^a \left[\frac{y}{(x^2+h^2)(x^2+y^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^a dx$$

$$= \frac{-qQh}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\int\limits_0^a \frac{a\,dx}{(x^2+h^2)(x^2+a^2+h^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-qQh}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot\left[\frac{1}{ha}\operatorname{arctg}\frac{ax}{h\sqrt{x^2+a^2+h^2}}\right]_0^a = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\operatorname{arctg}\frac{a^2}{h\sqrt{2a^2+h^2}}.$$

• Przykład 12.2

Obliczyć podane całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach:

a) $\iiint\limits_P xz\sin xy\,dxdydz$, gdzie $P = \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]\times[0,\pi]\times[0,1]$;

b) $\iiint\limits_P \frac{dxdydz}{\sqrt{x+y+z+1}}$, gdzie $P = [0,1]\times[0,2]\times[0,3]$.

Rozwiązanie

a) Korzystając ze wzoru na zamianę całki potrójnej na całki iterowane otrzymamy

$$\iiint\limits_P xz\sin xy\;dxdydz = \int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} dx\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^\pi xz\sin xy\;dy = \int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} dx\int\limits_0^1 z\left[-\cos xy\right]_{y=0}^{y=\pi} dz$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} dx\int\limits_0^1 z(1-\cos\pi x)\,dz = \int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} (1-\cos\pi x)\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}(1-\cos\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi}.$$

b) Korzystając ze wzoru na zamianę całki potrójnej na całki iterowane mamy

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_P \frac{dxdydz}{\sqrt{x+y+z+1}} &= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}} \\
&= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \left[2\sqrt{x+y+z+1}\right]_{z=0}^{z=3} dy \\
&= 2\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \left(\sqrt{x+y+4}-\sqrt{x+y+1}\right) dy \\
&= 2\int\limits_0^1 \left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{(x+y+4)^3}-\sqrt{(x+y+1)^3}\right)\right]_{y=0}^{y=2} dx \\
&= \frac{4}{3}\int\limits_0^1 \left(\sqrt{(x+6)^3}-\sqrt{(x+4)^3}-\sqrt{(x+3)^3}+\sqrt{(x+1)^3}\right) dx \\
&= \frac{4}{3}\left[\frac{2}{5}\left(\sqrt{(x+6)^5}-\sqrt{(x+4)^5}-\sqrt{(x+3)^5}+\sqrt{(x+1)^5}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{8}{15}\left(49\sqrt{7}-36\sqrt{6}-25\sqrt{5}+9\sqrt{3}+4\sqrt{2}-1\right).
\end{aligned}$$

- **Przykład 12.3**

Podane całki potrójne zamienić na iloczyny całek pojedynczych:

a) $\iiint\limits_P z2^{x-y}\,dxdydz$, gdzie $P=[0,1]\times[0,1]\times[-1,1]$;

b) $\iiint\limits_P \frac{x\ln^2\sqrt[y]{x}}{\cos z}\,dxdydz$, gdzie $P=[1,e]\times[1,2]\times\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$.

Rozwiązanie

W zadaniu wykorzystamy wzór na całkę z funkcji o zmiennych rozdzielonych.

a) Mamy

$$\iiint\limits_P z2^{x-y}\,dxdydz = \iiint\limits_P z2^x2^{-y}\,dxdydz = \left(\int\limits_0^1 2^x\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_0^1 2^{-y}\,dy\right)\cdot\left(\int\limits_{-1}^1 z\,dz\right).$$

b) Mamy

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_P \frac{x\ln^2\sqrt[y]{x}}{\cos z}\,dxdydz &= \iiint\limits_P \frac{x\ln^2 x}{y^2\cos z}\,dxdydz \\
&= \left(\int\limits_1^e x\ln^2 x\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_1^2 \frac{dy}{y^2}\right)\cdot\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dz}{\cos z}\right).
\end{aligned}$$

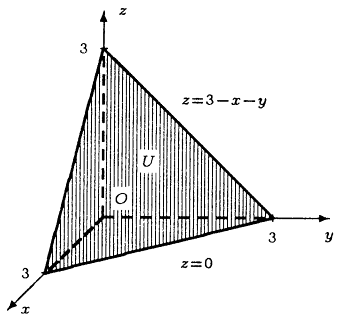
Przykład 12.4

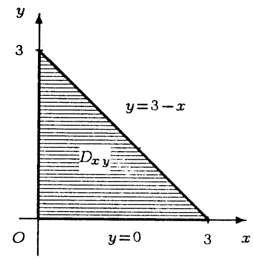
Całkę potrójną $\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar U jest ograniczony powierzchniami o podanych równaniach:

a) $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=3$; b) $x^2+y^2=3,\ z=-1,\ z=2$.

Rozwiązanie

a) Na rysunkach przedstawiono obszar całkowania U i jego rzut D_{xy} na płaszczyznę xOy.

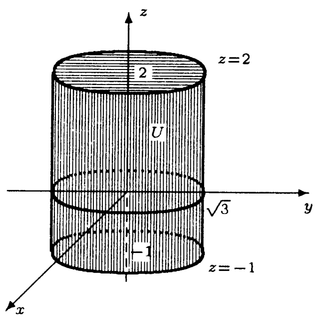


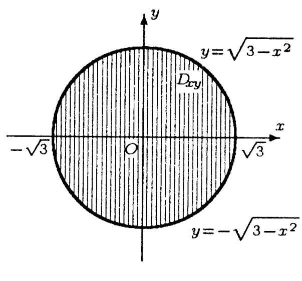


Zatem

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{3-x} dy\int\limits_0^{3-x-y} f(x,y,z)\,dz.$$

b) Obszar całkowania U oraz jego rzut D_{xy} na płaszczyznę xOy przedstawiono na rysunkach.





Zatem

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx\int\limits_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} dy\int\limits_{-1}^{2} f(x,y,z)\,dz.$$

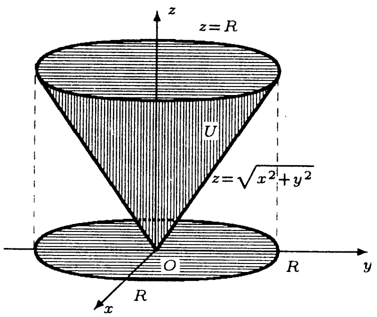
Przykład 12.5

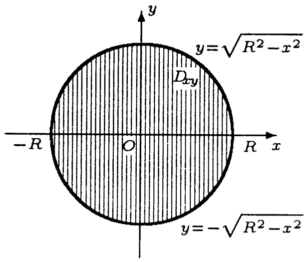
W podanych całkach iterowanych zmienić kolejność całkowania (rozważyć wszystkie przypadki):

a) $\displaystyle\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{R} f(x,y,z)\,dz$; b) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int\limits_{x^2+y^2}^{4} f(x,y,z)\,dz.$

Rozwiązanie

a) Obszar całkowania U oraz jego rzut D_{xy} na płaszczyznę xOy przedstawiono na rysunkach.



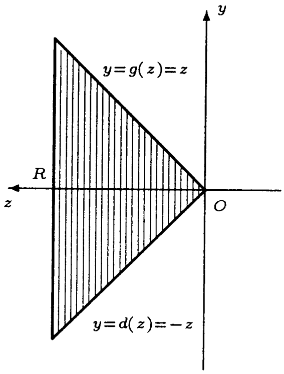


Całkę potrójną rozważaną w zadaniu zamienimy na całkę iterowaną postaci

$$\int\limits_{c}^{d} dz \int\limits_{d(z)}^{g(z)} dy \int\limits_{D(y,z)}^{G(y,z)} f(x,y,z)\,dx.$$

Potrzebny nam rzut obszaru U na płaszczyznę yOz przedstawiono na rysunku. Powierzchnie ograniczające obszar U odpowiednio z dołu i z góry (względem osi Ox) mają równania

$$x = D(y,z) = -\sqrt{z^2-y^2},$$
$$x = G(y,z) = \sqrt{z^2-y^2}.$$



Zatem szukana całka iterowana ma postać

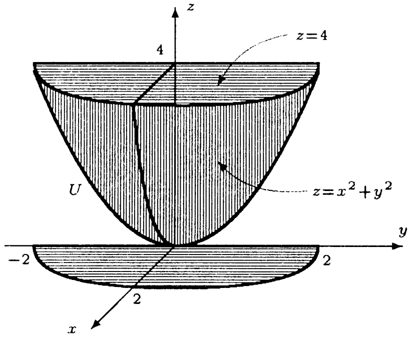
$$\int\limits_{0}^{R} dz \int\limits_{-z}^{z} dy \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx.$$

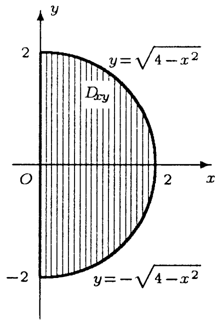
Ze względu na symetrię obszaru U i jego rzutów na płaszczyzny układu pozostałe 4 całki iterowane będą podobne. Podajemy te całki bez objaśnień.

$$\int\limits_{-R}^{R} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{R} f(x,y,z)\,dz, \qquad \int\limits_{-R}^{R} dy \int\limits_{|y|}^{R} dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx,$$

$$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{|x|}^{R} dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy, \quad \int\limits_{0}^{R} dz \int\limits_{-z}^{z} dx \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy.$$

b) Na rysunkach przedstawiono obszar całkowania U oraz jego rzut D_{xy} na płaszczyznę xOy.





Obszar D_{xy} traktowany jako normalny względem osi Ox można określić nierównościami $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}$. Natomiast ten sam obszar potraktowany jako normalny wględem osi Oy można opisać nierównościami $-2 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4-y^2}$. Zatem mamy dwie pierwsze całki iterowane postaci

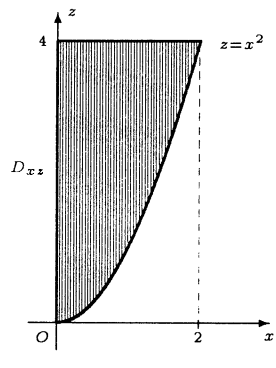
$$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{4} f(x,y,z)\,dz, \quad \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int\limits_{x^2+y^2}^{4} f(x,y,z)\,dz.$$

Niech teraz D_{xz} (zobacz rysunek) będzie rzutem obszaru U na płaszczyznę xOz. Obszar D_{xz} traktowany jako normalny względem osi Ox jest określony nierównościami

$$0 \leqslant x \leqslant 2, \quad x^2 \leqslant z \leqslant 4.$$

Z drugiej strony traktowany jako normalny względem osi Oz da się opisać nierównościami

$$0 \leqslant z \leqslant 4, \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{z}.$$



Wyznaczając jeszcze y z równania $z = x^2 + y^2$ mamy dwie następne całki iterowane

$$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dz \int\limits_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} f(x,y,z)\,dy, \quad \int\limits_{0}^{4} dz \int\limits_{0}^{\sqrt{z}} dx \int\limits_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} f(x,y,z)\,dy.$$

Prowadząc dalej podobne do przedstawionych rozważania otrzymamy dwie ostatnie całki iterowane:

$$\int_{-2}^{2} dy \int_{y^2}^{4} dz \int_{0}^{\sqrt{z-y^2}} f(x,y,z)\,dx, \qquad \int_{0}^{4} dz \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dy \int_{0}^{\sqrt{z-y^2}} f(x,y,z)\,dx.$$

Zadania

○ Zadanie 12.1

Obliczyć siłę, z jaką masa punktowa $m = 100$ kg jest przyciągana przez jednorodne koło o masie $M = 100000$ kg i promieniu $R = 4$ m. Masa punktowa jest położona na wysokości $H = 3$ m nad środkiem koła.

○ Zadanie 12.2

Obliczyć podane całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach:

a) $\displaystyle\iiint\limits_U \frac{x\,dxdydz}{yz}$, gdzie $U = [1,2] \times [1,e] \times [1,e]$;

b) $\displaystyle\iiint\limits_U (x+y+z)\,dxdydz$, gdzie $U = [1,2] \times [2,3] \times [3,4]$;

c) $\displaystyle\iiint\limits_U \sin x \sin(x+y) \sin(x+y+z)\,dxdydz$, gdzie $U = [0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi]$.

○ Zadanie 12.3

Podane całki potrójne zamienić na sumy iloczynów całek pojedynczych:

a) $\displaystyle\iiint\limits_U \sin(x+y+z)\,dxdydz$, gdzie $U = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,\pi]$;

b) $\displaystyle\iiint\limits_U z \ln\left(x^y y^x\right)\,dxdydz$, gdzie $U = [1,e] \times [1,e] \times [0,1]$.

○ Zadanie 12.4

Całkę potrójną $\displaystyle\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar U jest ograniczony powierzchniami o podanych równaniach:

a) $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$, $z = 6$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z = 4$, $(z \geqslant 4)$;

c) $z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$.

○ **Zadanie 12.5**
W podanych całkach iterowanych zmienić kolejność całkowania (rozważyć wszystkie przypadki):

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} dy \int\limits_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x,y,z)\, dz;$

b) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\, dz;$

c) $\int\limits_0^3 dz \int\limits_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dx \int\limits_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} f(x,y,z)\, dy.$

Odpowiedzi i wskazówki

12.1 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, gdzie $F_x = F_y = 0$ (z symetrii) oraz

$$F_z = -\frac{GmMH}{\pi R^2} \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \frac{dxdy}{(H^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = -125000 \text{ [N]}.$$

12.2 a) $\frac{3}{2}$; **b)** $\frac{15}{2}$; **c)** 0.

12.3 a) $\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\, dy\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\pi} \cos z\, dz\right) +$

$\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\, dy\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\pi} \cos z\, dz\right) + \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\, dy\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\pi} \sin z\, dz\right) -$

$\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx\right) \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\, dy\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\pi} \sin z\, dz\right);$

b) $\left(\int\limits_1^{e} \ln x\, dx\right) \cdot \left(\int\limits_1^{e} y\, dy\right) \cdot \left(\int\limits_0^{1} z\, dz\right) + \left(\int\limits_1^{e} x\, dx\right) \cdot \left(\int\limits_1^{e} \ln y\, dy\right) \cdot \left(\int\limits_0^{1} z\, dz\right).$

12.4 a) $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int\limits_{2\sqrt{x^2+y^2}}^{6} f(x,y,z)\, dz;$

b) $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy \int\limits_{4}^{\sqrt{25-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz$; **c)** $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{\sqrt{20-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz.$

12.5 a) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{3-3x} dz \int\limits_{0}^{2-2x-\frac{2}{3}z} f(x,y,z)\,dy$;

b) $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dz \int\limits_{-\sqrt{4-y^2-z^2}}^{\sqrt{4-y^2-z^2}} f(x,y,z)\,dx$; **c)** $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{-\sqrt{3-y^2}}^{\sqrt{3-y^2}} dx \int\limits_{x^2+y^2}^{3} f(x,y,z)\,dz.$

Uwaga. W każdym punkcie są jeszcze 4 inne całki iterowane.

Trzynasty tydzień

Całki potrójne po obszarach normalnych (6.2). Zamiana zmiennych w całkach potrójnych (6.3). Współrzędne walcowe w całkach potrójnych (6.4). Współrzędne sferyczne w całkach potrójnych (6.5).

Przykłady

• Przykład 13.1

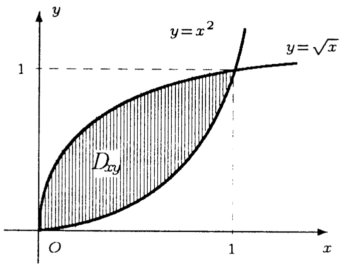
Obliczyć całki potrójne z danej funkcji po wskazanych obszarach:

a) $f(x,y,z) = xyz$, gdzie $U:\ y \geqslant x^2,\ x \geqslant y^2,\ 0 \leqslant z \leqslant xy$;

b) $f(x,y,z) = \sqrt{x}$, gdzie $U:\ 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi,\ 0 \leqslant z \leqslant \sin y$.

Rozwiązanie

a) Rzut D_{xy} obszaru U na płaszczyznę xOy przedstawiamy na rysunku. Obszar U jest ograniczony z dołu powierzchnią o równaniu $z = D(x,y) \equiv 0$, a z góry o równaniu $z = G(x,y) = xy$, gdzie $(x,y) \in D_{xy}$. Zamieniając całkę potrójną na całki iterowane otrzymamy

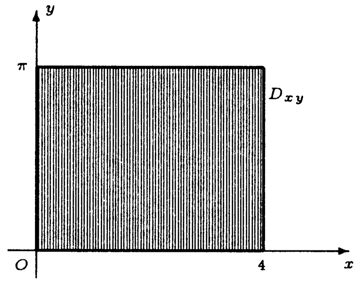


$$\iiint\limits_U xyz\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{xy} xyz\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} \left[\frac{xyz^2}{2}\right]_{z=0}^{z=xy} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} x^3y^3\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[\frac{x^3y^4}{4}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \left(x^5 - x^{11}\right) dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^{12}}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{96}.$$

b) Rzut D_{xy} obszaru U na płaszczyznę xOy przedstawiono na rysunku. Obszar U jest ograniczony z dołu powierzchnią o równaniu $z = D(x,y) \equiv 0$, a z góry o równaniu $z = G(x,y) = \sin y$, gdzie $(x,y) \in D_{xy}$. Zamieniając całkę potrójną na całki iterowane otrzymamy



$$\iiint_U \sqrt{x}\, dxdydz = \int_0^4 dx \int_0^\pi dy \int_0^{\sin y} \sqrt{x}\, dz$$

$$= \int_0^4 dx \int_0^\pi \sqrt{x}\left[z\right]_{z=0}^{z=\sin y} dy = \int_0^4 dx \int_0^\pi \sqrt{x} \sin y\, dy$$

$$\overset{\bullet}{=} \left(\int_0^4 \sqrt{x}\, dx\right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin y\, dy\right) = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^4 \cdot \left[-\cos y\right]_0^\pi = \frac{32}{3}.$$

W miejscu oznaczonym (•) korzystaliśmy z twierdzenia o całkowaniu funkcji o rozdzielonych zmiennych.

• Przykład 13.2

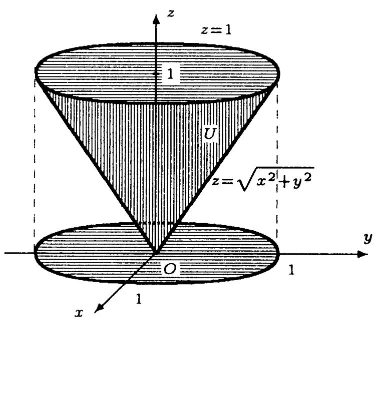
Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć podane całki po wskazanych obszarach:

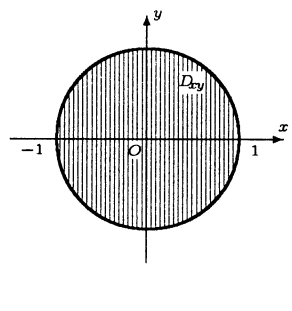
a) $\displaystyle\iiint_U \left(x^2 + y^2\right) dxdydz$, gdzie $U : \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1$;

b) $\displaystyle\iiint_U x^2\, dxdydz$, gdzie $U : 0 \leqslant z \leqslant 9 - x^2 - y^2$.

Rozwiązanie

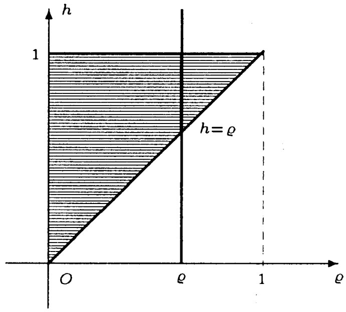
a) Obszar całkowania U jest stożkiem o wysokości 1 i promieniu podstawy 1. Stożek U i jego rzut na płaszczyznę xOy przedstawiamy na rysunkach.





Obszar D_{xy} jest określony we współrzędnych biegunowych przez nierówności

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 1.$$



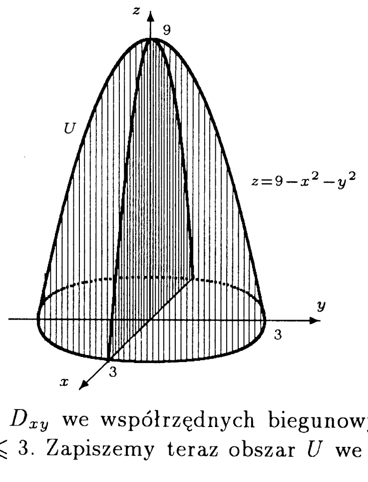
Dla ustalonego kąta φ rysujemy przekrój obszaru U półpłaszczyzną przechodzącą przez oś Oz i przez ramię kąta φ (zobacz rysunek). Z rysunku odczytujemy zakres zmienności h. Mamy $\varrho \leqslant h \leqslant 1$. Ostatecznie obszar U we współrzędnych walcowych jest określony nierównościami

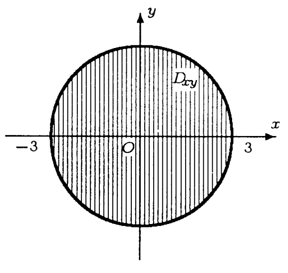
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 1, \quad \varrho \leqslant h \leqslant 1.$$

Dokonując teraz zamiany zmiennych w całce potrójnej na współrzędne walcowe otrzymujemy

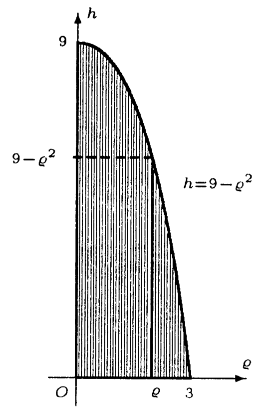
$$\begin{aligned}
\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\varrho \int_\varrho^1 \left(\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi\right) \varrho\, dh \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\varrho \int_\varrho^1 \varrho^3\, dh = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left[\varrho^3 h\right]_{h=\varrho}^{h=1} d\varrho \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\varrho^3-\varrho^4\right) d\varrho = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int_0^1 \left(\varrho^3-\varrho^4\right) d\varrho\right) \\
&= [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\varrho^4}{4}-\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^1 = 2\pi\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{10}.
\end{aligned}$$

b) Obszar całkowania U jest odcinkiem paraboloidy, a jego rzut D_{xy} na płaszczyznę xOy jest kołem (zobacz rysunek).





Obszar D_{xy} we współrzędnych biegunowych opisany jest nierównościami $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varrho \leqslant 3$. Zapiszemy teraz obszar U we wpółrzędnych walcowych. Na rysunku poniżej przedstawiono przekrój obszaru U półpłaszczyzną przechodzącą przez oś Oz i ramię kąta φ. Z rysunku odczytujemy zakres zmienej h. Mamy $0 \leqslant h \leqslant 9 - \varrho^2$.



We współrzędnych walcowych obszar U opisany jest układem nierówności

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 3, \quad 0 \leqslant h \leqslant 9 - \varrho^2.$$

Dokonując teraz zamiany zmiennych w całce potrójnej na współrzęne walcowe otrzymamy

$$\begin{aligned}\iiint\limits_U x^2\, dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 d\varrho \int_0^{9-\varrho^2} \varrho^3 \cos^2\varphi\, dh = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \varrho^3 \cos^2\varphi \left[h\right]_{h=0}^{h=9-\varrho^2} d\varrho \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \varrho^3 \left(9 - \varrho^2\right) \cos^2\varphi\, d\varphi \\ &\overset{\blacksquare}{=} \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^3 \varrho^3 \left(9-\varrho^2\right) d\varrho\right) \\ &= \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{9}{4}\varrho^4 - \frac{\varrho^6}{6}\right]_0^3 = \frac{243\pi}{4}.\end{aligned}$$

W miejscu oznaczonym ■ korzystaliśmy z twierdzenia o całkowaniu funkcji o rozdzielonych zmiennych.

• Przykład 13.3

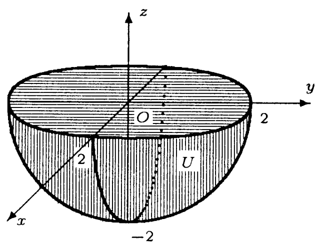
Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć podane całki po wskazanych obszarach:

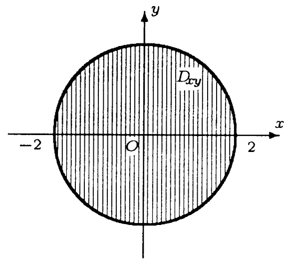
a) $\iiint\limits_U \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz$, gdzie $U: -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leqslant z \leqslant 0$;

b) $\iiint\limits_U z^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$, gdzie $U: 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant x$.

Rozwiązanie

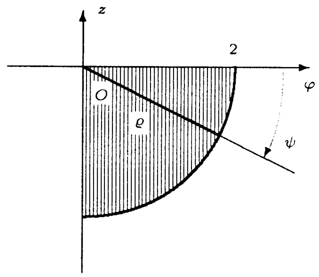
a) Obszar całkowania U jest dolną półkulą o promieniu $R = 2$. Półkulę U i jej rzut D_{xy} na płaszczyznę xOy przedstawiamy na rysunkach.





Na podstawie rzutu D obszaru U ustalamy zakres zmienności kąta φ we współrzędnych sferycznych (φ, ψ, ϱ). Mamy $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Aby określić zakres zmienności kąta ψ i promienia wodzącego rysujemy (dla ustalonego kąta φ) przekrój obszaru U półpłaszczyzną przechodzącą przez oś Oz i przez ramię kąta φ (zobacz rysunek). Z rysunku odczytujemy te zakresy:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant 0, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 2.$$



Ostatecznie obszar U we współrzędnych sferycznych opisany jest układem nierówności postaci:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant 0, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 2.$$

W rozważanej całce dokonujemy zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne. Mamy

$$\iiint\limits_U \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, dxdydz =$$

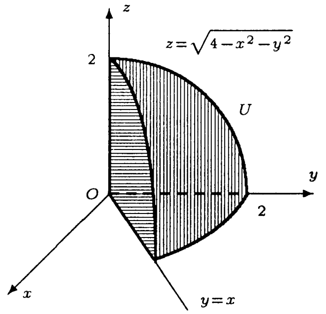
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\psi \int\limits_0^2 \left(\varrho^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi + \varrho^2 \sin^2\varphi \cos^2\psi + \varrho^2 \sin^2\psi\right) \varrho^2 \cos\psi \, d\varrho$$

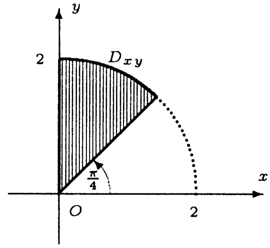
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\psi \int\limits_0^2 \varrho^4 \cos\psi \, d\varrho$$

$$= \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right) \left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos\psi \, d\psi\right) \cdot \left(\int\limits_0^2 \varrho^4 \, d\varrho\right)$$

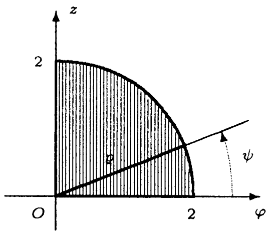
$$= \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\sin\psi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cdot \left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^2 = 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{32}{5} = \frac{64}{5}\pi.$$

b) Obszar całkowania (jest to część kuli) przedstawiono na rysunku.





Na podstawie rzutu D_{xy} obszaru U na płaszczyznę xOy ustalimy zakres zmienności kąta φ. Ponieważ rzutem tym jest $\frac{1}{8}$ część koła (zobacz rysunek), więc $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Dla ustalonego kąta φ rysujemy przekrój obszaru U płaszczyzną przechodzącą przez oś Oz i ramię kątą φ (zobacz rysunek).



Zatem $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$ i stąd $0 \leqslant \varrho \leqslant 2$. Ostatecznie obszar U we współrzędnych sferycznych opisany jest układem nierówności

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 2.$$

Dokonując teraz zamiany zmiennych w całce potrójnej na współrzędne sferyczne otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_U z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz &= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^2 \varrho^2 \sin^2\psi \cdot \varrho \cdot \varrho^2 \cos\psi \, d\varrho \\
&\overset{\bullet}{=} \left(\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\psi \cos\psi \, d\psi\right) \cdot \left(\int\limits_0^2 \varrho^5 \, d\varrho\right) \\
&= \Big[\varphi\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{1}{3}\sin^3\psi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{\varrho^6}{6}\right]_0^2 = \frac{8\pi}{9}.
\end{aligned}$$

W miejscu oznaczonym • korzystaliśmy z twierdzenia o zmiennych rozdzielonych w całce potrójnej.

• Przykład 13.4

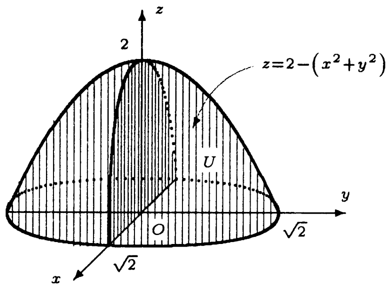
Obliczyć objętości obszarów ograniczonych podanymi powierzchniami:

a) $z = 2 - x^2 - y^2$, $z = 0$; b) $z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$, $z = 1$, $z = \sqrt{2}$.

Rozwiązanie

a) Obszar U rozważany w zadaniu jest ograniczony powierzchnią paraboloidy obrotowej $z = 2 - (x^2 + y^2)$ oraz płaszczyzną xOy (zobacz rysunek). Objętość $|U|$ tego obszaru wyraża się wzorem:

$$|U| = \iiint\limits_U dxdydz.$$



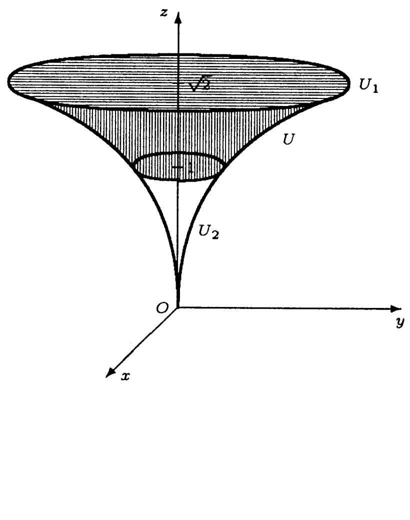
Obszar U we współrzędnych walcowych określony jest przez nierówności

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant \sqrt{2}, \quad 0 \leqslant h \leqslant 2 - \varrho^2.$$

Zatem po dokonaniu zamiany zmiennych na współrzędne walcowe w ostatniej całce otrzymamy

$$\begin{aligned}
|U| &= \iiint\limits_U dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} d\varrho \int\limits_0^{2-\varrho^2} \varrho\, dh \\
&= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left[\varrho h\right]_{h=0}^{h=2-\varrho^2} d\varrho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \varrho \left(2 - \varrho^2\right) d\varrho \\
&= \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right) \left(\int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(2\varrho - \varrho^3\right) d\varrho\right) = \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\varrho^2 - \frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \cdot \left(2 - \frac{4}{4}\right) = 2\pi.
\end{aligned}$$

b) Rozważany obszar U jest ograniczony powierzchnią obrotową $z = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$ oraz płaszczyznami $z = 1$ i $z = \sqrt{2}$ (zobacz rysunek).



Obszar U jest różnicą obszarów U_1 i U_2 zaznaczonych na rysunku. Zatem

$$|U| = |U_1| - |U_2|.$$

Obszar U_1 we współrzędnych walcowych opisany jest układem nierówności:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 2, \quad \sqrt{\varrho} \leqslant h \leqslant \sqrt{2},$$

a obszar U_2 układem

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 1, \quad \sqrt{\varrho} \leqslant h \leqslant 1.$$

Obliczymy teraz, dokonując zamiany zmiennych na współrzędne walcowe, objętości tych brył. Mamy odpowiednio

$$|U_1| = \iiint\limits_{U_1} dV = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} d\varrho \int\limits_{\sqrt{\varrho}}^{\sqrt{2}} \varrho\, dh$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \varrho \left[h\right]_{h=\sqrt{\varrho}}^{h=\sqrt{2}} d\varrho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \varrho\left(\sqrt{2}\varrho - \varrho\sqrt{\varrho}\right) d\varrho$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\varrho^2 - \frac{2}{5}\varrho^2\sqrt{\varrho}\right]_{\varrho=0}^{\varrho=2} d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{5}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\sqrt{2}\pi}{5},$$

$$|U_2| = \iiint\limits_{U_2} dV = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} d\varrho \int\limits_{\sqrt{\varrho}}^{1} \varrho\, dh$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} \varrho \left[h\right]_{h=\sqrt{\varrho}}^{h=1} d\varrho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} \left(\varrho - \varrho\sqrt{\varrho}\right) d\varrho$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[\frac{\varrho^2}{2} - \frac{2}{5}\varrho^2\sqrt{\varrho}\right]_{\varrho=0}^{\varrho=1} d\varphi = \frac{1}{10}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{5}.$$

Zatem

$$|U| = |U_1| - |U_2| = \frac{4\sqrt{2}\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

Zadania

○ Zadanie 13.1

Obliczyć całki potrójne z danych funkcji po wskazanych obszarach:

a) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$, gdzie $U: x \leqslant 0,\ -x \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant -x$;

b) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(3x+2y+z+1)^4}$, gdzie $U: x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1-x-y$;

c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, gdzie $U: x^2 + y^2 \leqslant 4,\ 1 - x \leqslant z \leqslant 2 - x$.

○ **Zadanie 13.2**
Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć podane całki po wskazanych obszarach:

a) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 dxdydz$, gdzie $U: x^2+y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$;

b) $\iiint\limits_U xyz\, dxdydz$, gdzie $U: \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$;

c) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz$, gdzie $U: x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$.

○ **Zadanie 13.3**
Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć podane całki po wskazanych obszarach:

a) $\iiint\limits_U \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, gdzie $U: 4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9$;

b) $\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz$, gdzie $U: \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$;

c) $\iiint\limits_U z^2\, dxdydz$, gdzie $U: x^2+y^2+(z-R)^2 \leqslant R^2\ (R>0)$;

d) $\iiint\limits_U x^2\, dxdydz$, gdzie $U: x^2+y^2+z^2 \leqslant 4x$.

○ **Zadanie 13.4**
Obliczyć objętości obszarów U ograniczonych podanymi powierzchniami:

a) $x^2+y^2=9,\ \ x+y+z=1,\ \ x+y+z=5$;

b) $x=-1,\ \ x=2,\ \ z=4-y^2,\ \ z=2+y^2$;

c) $z=\dfrac{1}{1+x^2+y^2},\ \ z=0,\ \ x^2+y^2=1$.

Odpowiedzi i wskazówki

13.1 a) $3-e$; **b)** $\dfrac{1}{144}$; **c)** 8π.

13.2 a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 d\varrho \int_0^1 \left(\varrho^2+h^2\right)^2 \varrho\, dh = \frac{412}{15}\pi$;

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} d\varrho \int_{\varrho}^{\sqrt{1-\varrho^2}} h\varrho^3 \sin\varphi\cos\varphi\, dh = 0$;

c) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} d\varrho \int\limits_{R-\sqrt{R^2-\varrho^2}}^{\sqrt{R^2-\varrho^2}} \varrho^3\, dh = \frac{53}{480}\pi R^5.$

13.3 a) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_2^3 \varrho \cos\psi\, d\varrho = 10\pi;$

b) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^1 \varrho^4 \cos^3\psi\, d\varrho = \frac{2\pi}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}\right);$

c) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{2R\sin\psi} \varrho^4 \sin^2\psi \cos\psi\, d\varrho = \frac{8}{5}\pi R^5;$

d) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{4\cos\varphi\cos\psi} \varrho^4 \cos^2\varphi \cos^3\psi\, d\varrho = \frac{256\pi}{5}.$

13.4 a) $|U| = 36\pi$; **b)** $|U| = 8$; **c)** $|U| = \pi \ln 2$.

Czternasty tydzień

Zastosowania całek potrójnych (6.6).

Przykłady

• **Przykład 14.1**

Obliczyć masy podanych obszarów o zadanych gęstościach objętościowych:

a) $U: x^2 + y^2 \leqslant 16,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}$, gdzie $\gamma(x,y,z) = x^2 + y^2$;

b) $U: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant z$, gdzie $\gamma(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+1}$.

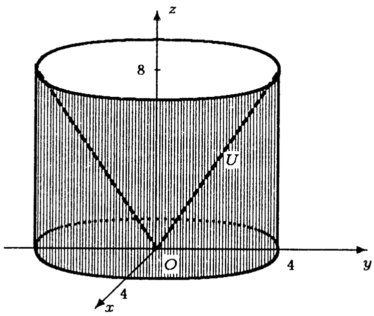
Rozwiązanie

Masę M obszaru U o gęstości objętościowej $\gamma = \gamma(x,y,z)$ obliczamy ze wzoru

$$M = \iiint\limits_U \gamma(x,y,z)\, dxdydz.$$

a) Obszar U rozważany w tym przykładzie jest walcem o promieniu 4 i wysokości 8, z którego wycięto od góry stożek (zobacz rysunek). Obszar U we współrzędnych walcowych jest określony przez nierówności:

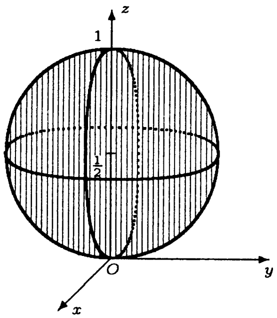
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 4,\quad 0 \leqslant h \leqslant 2\varrho.$$



Po dokonaniu zamiany zmiennych na współrzędne walcowe otrzymamy

$$\begin{aligned}M &= \iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right)\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^4 d\varrho \int\limits_0^{2\varrho} \varrho^2\cdot\varrho\,dh\\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^4 \left[\varrho^3 h\right]_{h=0}^{h=2\varrho} d\varrho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^4 2\varrho^4\,d\varrho = 2\left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^4 \varrho^4\,d\varrho\right)\\ &= 2\cdot[\varphi]_0^{2\pi}\left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^4 = 2\cdot 2\pi\cdot\frac{1024}{5} = \frac{4096}{5}\pi.\end{aligned}$$

b) Obszar U rozważany w przykładzie jest kulą o środku $(0,0,1)$ i promieniu $\frac{1}{2}$ (zobacz rysunek).



Obszar ten we współrzędnych sferycznych określony jest przez nierówności

$$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\varrho\leqslant\sin\psi.$$

Po dokonaniu zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne otrzymamy

$$\begin{aligned}M &= \iiint\limits_U \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2+1}\\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{\sin\psi} \frac{\varrho^2\cos\psi}{\varrho^2+1}d\varrho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\left[\varrho - \operatorname{arctg}\varrho\right]_{\varrho=0}^{\varrho=\sin\psi} d\psi =\end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\,(\sin\psi - \operatorname{arctg}(\sin\psi))\,d\psi$$

$$\stackrel{\bullet}{=} \left(\int_0^{2\pi} \varphi\,d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\psi\cos\psi - \operatorname{arctg}(\sin\psi)\cos\psi)\,d\psi\right)$$

$$\stackrel{\blacksquare}{=} \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\psi - \sin\psi\operatorname{arctg}(\sin\psi) + \frac{1}{2}\ln\left(\sin^2\psi+1\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= = \pi\left(1-\frac{\pi}{2}+\ln 2\right).$$

W miejscu oznaczonym • zastosowano twierdzenie o całkowaniu funkcji o rozdzielonych zmiennych. Natomiast w miejscu oznaczonym ■ zastosowano podstawienie $t = \sin\psi$, a otrzymaną całkę $\int \operatorname{arctg} t\,dt$ obliczono całkując przez części.

• Przykład 14.2

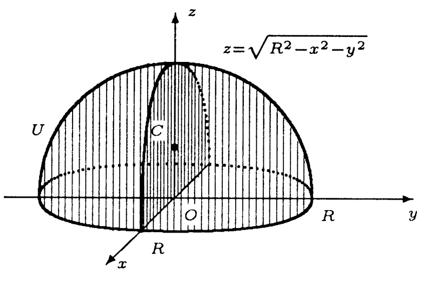
Wyznaczyć położenia środków masy podanych obszarów jednorodnych:

a) półkula o promieniu R;

b) $U: \ x^2 \leqslant y \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 4-y$.

Rozwiązanie

a) Ponieważ obszar U (półkula) jest jednorodny oraz ma oś symetrii, więc jego środek masy leży na tej osi. Niech U będzie położony względem układu współrzędnych jak na rysunku. Wtedy $x_C = 0$, $y_C = 0$. Współrzędną z_C środka masy C obliczamy ze wzoru



$$z_C = \frac{\displaystyle\iiint\limits_U z\gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\displaystyle\iiint\limits_U \gamma(x,y,z)\,dxdydz}.$$

Nie zmniejszając ogólności dalszych rozważań możemy przyjąć, że $\gamma(x,y,z) = \gamma_0 = 1$. Wtedy

$$\iiint\limits_U \gamma(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_U dxdydz = |U| = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Natomiast w drugiej z całek wyrażającej współrzędną z_C dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne. Półkula U w tych współrzędnych opisana jest przez nierówności

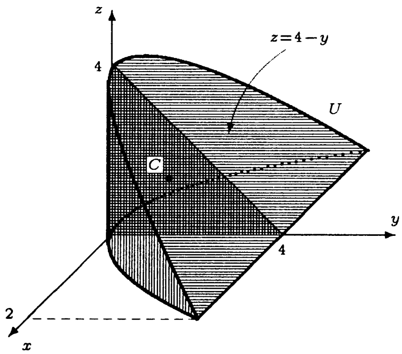
$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\quad 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqslant \varrho \leqslant R.$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
MS_{xy} &= \iiint\limits_U z\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^R \varrho\sin\psi\cdot\varrho^2\cos\psi\,d\varrho \\
&= \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi\cos\psi\,d\psi\right)\left(\int\limits_0^R \varrho^3\,d\varrho\right) \\
&= \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{\sin^2\psi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi R^4}{4}.
\end{aligned}
$$

Stąd $z_C = \frac{3}{8}R$. Zatem środek masy jest w punkcie $\left(0, 0, \frac{3}{8}R\right)$.

b) Obszar U przedstawiono na rysunku. Ponieważ płaszczyzna $x = 0$ jest płaszczyzną symetrii tego obszaru oraz ponieważ jest on jednorodny, więc jego środek masy także należy do tej płaszczyzny. Zatem $x_C = 0$. Współrzędne y_C i z_C obliczymy ze wzorów:



$$
y_C = \frac{\iiint\limits_U y\,dV}{\iiint\limits_U dV}, \quad z_C = \frac{\iiint\limits_U z\,dV}{\iiint\limits_U dV}.
$$

Obliczymy teraz całki występujące w tych wzorach. Mamy kolejno

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_U y\,dV &= \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dy \int\limits_0^{4-y} y\,dz \\
&= \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} y\Big[z\Big]_{z=0}^{z=4-y} dy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} y(4-y)\,dy \\
&= \int\limits_{-2}^{2}\left[2y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=4} dx = \int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{32}{3} - 2x^4 + \frac{x^6}{3}\right) dx \\
&= \left[\frac{32}{3}x - \frac{2}{5}x^5 + \frac{x^7}{21}\right]_{-2}^{2} = \frac{1024}{35},
\end{aligned}
$$

$$\iiint\limits_U z\,dV = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dy \int\limits_{0}^{4-y} z\,dz$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4-y} dy = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} (4-y)^2\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} \left[\frac{(y-4)^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=4} dx = \frac{1}{6}\int\limits_{-2}^{2} \left(4-x^2\right)^3 dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[64x - 16x^3 + \frac{12}{5}x^5 - \frac{x^7}{7}\right]_{-2}^{2} = \frac{2048}{105}.$$

Na koniec obliczymy masę obszaru U. Mamy

$$\iiint\limits_U dV = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} dy \int\limits_{0}^{4-y} dz$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} \left[z\right]_{z=0}^{z=4-y} dy = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} (4-y)\,dy$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} \left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=4} dx = \int\limits_{-2}^{2} \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx$$

$$= \left[8x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_{-2}^{2} = \frac{256}{15}.$$

Powracamy teraz do obliczenia współrzędnych środka masy. Mamy

$$y_C = \frac{1024}{35}\cdot\frac{15}{256} = \frac{12}{7}, \qquad z_C = \frac{2048}{105}\cdot\frac{15}{256} = \frac{8}{7}.$$

Ostatecznie $(x_C, y_C, z_C) = \left(0, \frac{12}{7}, \frac{8}{7}\right)$.

• Przykład 14.3

Obliczyć momenty bezwładności względem wskazanych osi, podanych obszarów jednorodnych o masie M:

a) kula U o promieniu R, względem jej średnicy;

b) paraboloidy obrotowej $2\left(x^2+y^2\right) \leqslant z \leqslant 8$, względem jej osi symetrii.

Rozwiązanie

Moment bezwładności jednorodnego obszaru U względem osi Oz wyraża się wzorem

$$I_z = \gamma_0 \iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dx\,dy\,dz,$$

gdzie γ_0 oznacza gęstość objętościową masy tego obszaru.

a) W tym przykładzie w powyższej całce dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne. Kula U w tych współrzędnych jest opisana przez nierówności:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant R.$$

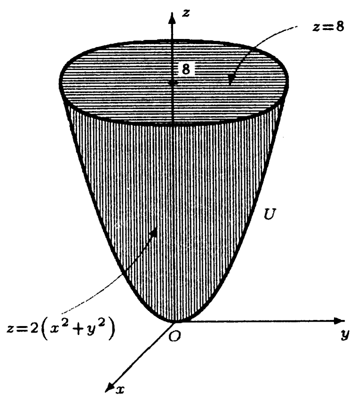
Zatem

$$\begin{aligned}
I_z &= \gamma_0 \iiint\limits_U \left(x^2 + y^2\right)\, dxdydz \\
&= \gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^R \left(\varrho^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi + \varrho^2 \sin^2\varphi \cos^2\psi\right) \varrho^2 \cos\psi\, d\varrho \\
&= \gamma_0 \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\, d\psi\right) \cdot \left(\int\limits_0^R \varrho^4\, d\varrho\right) \\
&= \gamma_0 \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} \cdot \left[\sin\psi - \frac{\sin^3\psi}{3}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^R = \gamma_0 \cdot 2\pi \cdot 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{8\pi}{15}\gamma_0 R^5.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\gamma_0 = \dfrac{M}{|U|} = \dfrac{3M}{4\pi R^3}$, więc ostatecznie $I_z = \dfrac{2}{5} M R^2$.

b) W tym przypadku dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne walcowe. Obszar U (zobacz rysunek) w tych współrzędnych opisany jest przez nierówności:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant 2, \quad 2\varrho^2 \leqslant h \leqslant 8.$$



Obliczymy najpierw objętościową gęstość masy. Mamy

$$\gamma_0 = \frac{M}{|U|} = \frac{M}{\iiint\limits_U dV} = \frac{M}{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 d\varrho \int\limits_{2\varrho^2}^8 dh} = \frac{M}{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \Big[h\Big]_{h=2\varrho^2}^{h=8} d\varrho} =$$

$$= \frac{M}{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(8 - 2\varrho^2\right) d\varrho} = \frac{M}{2\left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[4\varrho - \frac{\varrho^3}{3}\right]_0^2} = \frac{3M}{16\pi}.$$

Teraz możemy obliczyć moment bezwładności obszaru U. Mamy

$$I_z = \gamma_0 \iiint\limits_U \left(x^2 + y^2\right) dV = \frac{3M}{16\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 d\varrho \int\limits_{2\varrho^2}^8 \varrho^3\, dh$$

$$= \frac{3M}{16\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \varrho^3 \left[h\right]_{h=2\varrho^2}^{h=8} d\varrho = \frac{3M}{16\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(8\varrho^3 - 2\varrho^5\right) d\varrho$$

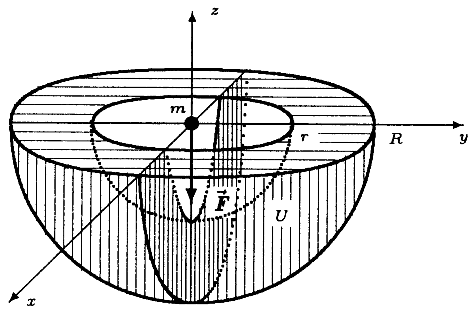
$$= \frac{3M}{8\pi} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \cdot \left[\varrho^4 - \frac{\varrho^6}{6}\right]_0^2 = \frac{3M}{8\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{16}{3} = 4M.$$

• Przykład 14.4

Obliczyć siłę, z jaką jednorodna półkula wydrążona o promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R oraz o masie M przyciąga masę punktową m umieszczoną w środku tej półkuli.

Rozwiązanie

Ponieważ półkula jest jednorodna i układ tych ciał materialnych, tj. półkuli i punktu materialnego, ma oś symetrii, to siła $\vec{F}$, z jaką ta półkula przyciąga masę punktową, ma współrzędne $F_x = 0$, $F_y = 0$.



Współrzędną F_z tej siły obliczamy ze wzoru

$$F_z = -Gm\gamma_0 \iiint\limits_U \frac{z\, dx dy dz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \text{gdzie} \quad \gamma_0 = \frac{3M}{2\pi\left(R^3 - r^3\right)}$$

jest gęstością objętościową półkuli. W całce potrójnej określającej składową F_z dokonujemy zamiany zmiennych na współrzędne sferyczne. Półkula U w tych współrzędnych jest opisana przez nierówności

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant 0, \quad r \leqslant \varrho \leqslant R.$$

Zatem

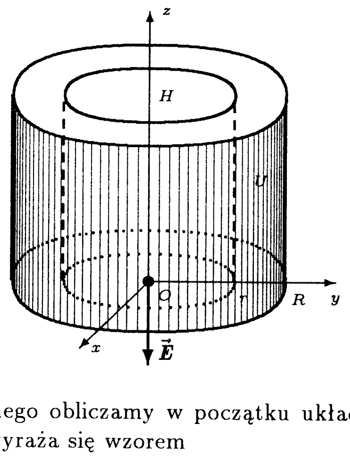
$$
\begin{aligned}
F_z &= -Gm\gamma_0 \iiint\limits_U \frac{z\,dxdydz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -Gm\gamma_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\psi \int\limits_r^R \frac{\varrho\sin\psi\cdot\varrho^2\cos\psi\,d\varrho}{\left(\varrho^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+\varrho^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+\varrho^2\sin^2\psi\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= -Gm\gamma_0 \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\psi\cos\psi\,d\psi\right)\cdot\left(\int\limits_r^R d\varrho\right) \\
&= -Gm\frac{3M}{2\pi\left(R^3-r^3\right)}\cdot\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{\sin^2\psi}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cdot\left[\varrho\right]_r^R \\
&= -Gm\frac{3M}{2\pi\left(R^3-r^3\right)}\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(R-r) = -\frac{3GMm}{2\left(R^2+Rr+r^2\right)}.
\end{aligned}
$$

- **Przykład 14.5**

Obliczyć natężenie pola elektrycznego, jakie wytwarza jednorodnie naładowany wydrążony walec o promieniu wewnętrznym podstawy r, promieniu zewnętrznym R, wysokości H i ładunku całkowitym Q, w środku podstawy walca.

Rozwiązanie

Niech walec wydrążony U będzie położony względem układu współrzędnych jak na rysunku.



Natężenie $\vec{E}$ pola elektrycznego obliczamy w początku układu współrzędnych. Objętościowa gęstość ładunku γ_0 wyraża się wzorem

$$\gamma_0 = \frac{Q}{|U|} = \frac{Q}{\pi H\left(R^2-r^2\right)}.$$

Ze względu na symetryczne położenie obszaru U i punktu O wektor natężenia $\vec{E}$ ma współrzędne $E_x = 0$, $E_y = 0$. Współrzędną E_z natężenia $\vec{E}$ obliczamy ze wzoru

$$E_z = \frac{\gamma_0}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_U \frac{-z\,dxdydz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

W całce tej dokonamy zamiany zmiennych na współrzędne walcowe. Walec U w tych współrzędnych jest określony przez nierówności:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad r \leqslant \varrho \leqslant R, \quad 0 \leqslant h \leqslant H.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{\gamma_0}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_U \frac{-z\,dx dy dz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{-\gamma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_r^R d\varrho \int\limits_0^H \frac{\varrho h\,dh}{\left(\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin^2\varphi+h^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{-\gamma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_r^R d\varrho \int\limits_0^H \frac{\varrho h\,dh}{\left(\varrho^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\gamma_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_r^R \left[\frac{-\varrho}{\sqrt{\varrho^2+h^2}}\right]_{h=0}^{h=H} d\varrho \\
&= \frac{-\gamma_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_r^R \left(1-\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2+H^2}}\right) d\varrho\right) \\
&= \frac{-\gamma_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \left[\varrho-\sqrt{\varrho^2+H^2}\right]_r^R \\
&= \frac{-\gamma_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi \left[R-\sqrt{R^2+H^2}-r+\sqrt{r^2+H^2}\right] \\
&= \frac{-Q}{2\varepsilon_0\pi H\left(R^2-r^2\right)} \cdot \left[R-\sqrt{R^2+H^2}-r+\sqrt{r^2+H^2}\right].
\end{aligned}$$

Zadania

○ Zadanie 14.1

Obliczyć masy podanych obszarów o zadanych gęstościach objętościowych:

a) $U=[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$, gdzie $\gamma(x,y,z)=x+y+z$ oraz $a,b,c>0$;

b) $U:\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 9$, gdzie $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

○ Zadanie 14.2

Wyznaczyć położenia środków masy podanych obszarów jednorodnych:

a) $U:\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x,\ 0\leqslant z\leqslant 1-x$;

b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H;

c) $U:\ x^2+y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}$.

○ Zadanie 14.3

Obliczyć momenty bezwładności względem wskazanych osi podanych obszarów jednorodnych o masie M :

a) walec o promieniu podstawy R i wysokości H, względem osi walca;

b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H, względem osi stożka;

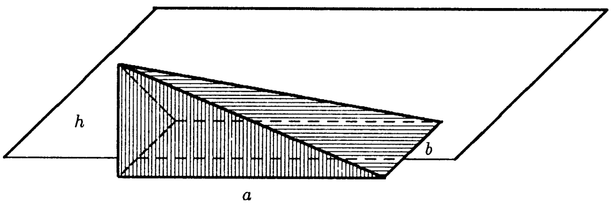
c) walec o promieniu podstawy R i wysokości H, względem średnicy podstawy;

d*) część kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ położona w pierwszym oktancie, względem osi symetrii tej części.

○ **Zadanie 14.4**
Obliczyć siłę, z jaką jednorodna kula o promieniu R i masie M przyciąga punkt materialny o masie m położony w odległości d od środka kuli, $d > R$.

○ **Zadanie 14.5**
Obliczyć natężenie pola elektrycznego, jakie wytwarza jednorodnie naładowany stożek o promieniu podstawy R, wysokości H i ładunku całkowitym Q, w swoim wierzchołku.

○ **Zadanie* 14.6**
Podstawą jednorodnego ostrosłupa jest prostokąt o wymiarach $a = 40$ cm, $b = 30$ cm. Jedna z krawędzi ostrosłupa jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i ma długość $h = 20$ cm. Obliczyć, jak daleko może wystawać ten ostrosłup poza krawędź stołu, aby nie spadł na podłogę (rysunek).



Odpowiedzi i wskazówki

14.1 a) $M = \frac{abc}{2}(a+b+c)$; **b)** $M = \frac{972}{5}\pi$.

14.2 a) $x_C = \frac{1}{4}$, $y_C = \frac{3}{8}$, $z_C = \frac{3}{8}$; **b)** środek masy leży na osi symetrii w odległości $\frac{H}{4}$ od podstawy; **c)** $x_C = y_C = 0$ (z symetrii), $z_C = \frac{7}{6}$.

14.3 a) $I_z = \frac{1}{2}MR^2$; **b)** $I_z = \frac{3}{10}MR^2$; **c)** $I_x = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right)$; **d*)** $I_l = \frac{2(\pi - 2)}{5\pi}MR^2$, gdzie $l: x = y = z$.

14.4 $F = |\vec{F}| = \frac{GmM}{d^2}$. Siła $\vec{F}$ jest skierowana wzdłuż prostej łączącej punkt materialny ze środkiem kuli.

14.5 $E = |\vec{E}| = \frac{3Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right)$. Natężenie $\vec{E}$ jest skierowane wzdłuż osi stożka w kierunku do podstawy.

14.6* $\frac{3}{8}b$.

Zbiory zadań

1. G.N.Berman, *Zbiór zadań z analizy matematycznej,* PWN, Warszawa 1966.
2. S.Białynicz, K.Zieliński, *Zadania z matematyki wyższej dla studentów politechnik,* PWN, Warszawa 1963.
3. K.Borsuk, *Ćwiczenia z analizy matematycznej,* PZWS, Warszawa 1951.
4. B.P.Demidowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej, T. 1–3,* Naukowa Książka, Lublin 1992–93.
5. M.Gewert, *Zbiór zadań z analizy matematycznej cz. I–II,* Wydawnictwo Politechniki Wr., Wrocław 1992.
6. N.M.Giunter, R.O.Kuźmin, *Zbiór zadań z matematyki wyższej, T. 1–3,* PWN, Warszawa 1957.
7. S.Gniłka, K.Nowakowski, D.Stachowiak-Gniłka, *Zbiór zadań dla chemików, T. II,* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1998.
8. W.Kaczor, M.Nowak, *Zadania z analizy matematycznej. Część I. Liczby rzeczywiste, ciągi, szeregi liczbowe,* Wydawnictwo UMCS, Lublin 1996.
9. W.Kołodziej, *Podstawy analizy matematycznej w zadaniach,* Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1995.
10. T.Kowalski, J.Muszyński, W.Sadkowski, *Zbiór zadań z matematyki,* Tom I, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1998.
11. W.Krysicki, L.Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. I–II,* PWN, Warszawa 1999.
12. W.Leksiński, I.Nabiałek, W.Żakowski, *Matematyka. Zadania,* WNT, Warszawa, 1992.
13. W.P.Minorski, *Zbiór zadań z matematyki wyższej,* WNT, Warszawa 1974.
14. Red. L.Siewierski, *Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniami, T. I i II,* PWN, Warszawa 1981 i 1982.
15. W.Stankiewicz, J.Wojtowicz, *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, T. 1–2,* PWN, Warszawa, 1995.
16. S.Tarnowski, S.Wajler, *Matematyka w zadaniach, Cz. IV,* Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce 2000.
17. G.I.Zaporożec, *Metody rozwiązywania zadań z analizy matematycznej,* WNT, Warszawa 1976.
18. W.Żakowski, *Ćwiczenia problemowe dla politechnik,* WNT, Warszawa 1991.

Księgarnie prowadzące sprzedaż książek naszego wydawnictwa

Księgarnia DOM KSIĄŻKI
Politechnika Białostocka
15-351 **Białystok**, ul. Wiejska 45C

Księgarnia AKADEMICKA
Akademia Humanistyczno-Techniczna
43-309 **Bielsko-Biała**, ul. Szeroka

Księgarnia Akademii Bydgoskiej
85-064 **Bydgoszcz**, ul. Chodkiewicza 30

Księgarnia AKADEMICKA
42-200 **Częstochowa**, ul. Armii Krajowej 46
www.akademickacz-wa.home.pl

Księgarnia U CHŁOPAKÓW
42-200 **Częstochowa**, al. NMP 18

Księgarnia KOLIBER
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
42-200 **Częstochowa**, ul. Waszyngtona 4/8

Księgarnia Wydawnictwa PG
Politechnika Gdańska
80-952 **Gdańsk**, ul. Narutowicza 11/12

Księgarnia KALLIMACH
Biblioteka Główna Uniwersytetu Gdańskiego
81-824 **Sopot**, ul. Armii Krajowej 119/121

Księgarnia LITERKA
Uniwersytet Gdański
80-952 **Gdańsk-Oliwa**, ul. Wita Stwosza 55

Księgarnia Wydawnictwa PŚ
Politechnika Śląska
44-100 **Gliwice**, ul. Akademicka 2, 7, 16

Księgarnia Wydawnictwa PŚ
Politechnika Śląska
40-100 **Katowice**, ul. Krasińskiego 8

Księgarnia SKRYPT
Uniwersytet Śląski
40-007 **Katowice**, ul. Uniwersytecka 4

Księgarnia STACHURSKI
Politechnika Świętokrzyska
25-314 **Kielce**, al. 1000-lecia P.P. 7b
www.stachurski.prv.pl

Księgarnia Akademicka ŚWIATOWID
25-315 **Kielce**, ul. Starodomaszowska 30

Księgarnia Naukowa
Politechnika Koszalińska
75-620 **Koszalin**, ul. Racławicka 15-17

Sprzedaż Uczelnianych Wydawnictw
Akademia Górniczo-Hutnicza
30-059 **Kraków**, al. Mickiewicza 30

Księgarnia
Politechnika Krakowska
31-155 **Kraków**, ul. Warszawska 24

Księgarnia ACADEMICUS
Akademia Pedagogiczna
30-084 **Kraków**, ul. Podchorążych 2

Główna Księgarnia Naukowa
31-118 **Kraków**, ul. Podwale 6
www.eksiegarnia.pl

Księgarnia EXLIBRIS
58-220 **Legnica**, ul. Złotoryjska 23

Księgarnia Naukowo-Techniczna
Politechnika Lubelska
20-618 **Lublin**, ul. Nadbystrzycka 36

Księgarnia SEBO
Politechnika Lubelska
20-618 **Lublin**, ul. Nadbystrzycka 38a

Księgarnia SINUS
Politechnika Lubelska
20-618 **Lublin**, ul. Nadbystrzycka 40

Księgarnia Uniwersytecka
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
20-031 **Lublin**, pl. Curie-Skłodowskiej 5

Księgarnia WENA
Katolicki Uniwersytet Lubelski
20-037 **Lublin**, al. Racławickie 14

Księgarnia MERITUM
Politechnika Łódzka
90-924 **Łódź**, ul. Żwirki 36

Księgarnia PRUSZYŃSKI BEZ SPÓŁKI
Uniwersytet Łódzki
90-938 **Łódź**, ul. Matejki 34/38

Księgarnia TECHNICZNA
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa
48-300 **Nysa**, ul. Chodowieckiego 4

Księgarnia ŻAK
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
10-718 **Olsztyn**, ul. Oczapowskiego 6

Księgarnia TECHNICZNA
Politechnika Opolska
45-271 **Opole**, ul. Sosnkowskiego 31
www.ktech.opole.pl

Księgarnia AKADEMICKA
Uniwersytet Opolski
45-058 **Opole**, ul. Kośnego 45

Księgarnia Akademicka
Filia Politechniki Warszawskiej
00-271 **Płock**, pl. Łukasiewicza 17

Księgarnia Uniwersytecka
Uniwersytet Adama Mickiewicza
60-813 **Poznań**, ul. Zwierzyniecka 7

Księgarnia Naukowa KAPITAŁKA
61-725 **Poznań**, ul. Mielżyńskiego 27/29
www.kapitalka.com.pl

Księgarnia Techniczna DOM KSIĄŻKI
61-888 **Poznań**, ul. Półwiejska 14

Sklep Papierniczy
Politechnika Poznańska
61-141 **Poznań**, ul. Kórnicka 30
(osiedle akademickie Piotrowo)

Księgarnia EKONOMIK
Politechnika Radomska
26-600 **Radom**, ul. Chrobrego 31

Księgarnia UNKA
Politechnika Rzeszowska
35-329 **Rzeszów**, al. Powstańców Warszawy 8

Księgarnia Akademicka LIBRA
Uniwersytet Rzeszowski
35-310 **Rzeszów**, ul. Rejtana 16c

Kiosk-Księgarnia
Politechnika Szczecińska
70-311 **Szczecin**, al. Piastów 48

Księgarnia FRASZKA
12-100 **Szczytno**, ul. Polska 1/17

Uniwersytecka Księgarnia Naukowa
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
87-100 **Toruń**, ul. Reja 25
www.uni.torun.pl/ksiegarnia

Księgarnia Studencka
Politechnika Warszawska
00-661 **Warszawa**, pl. Politechniki 1

Księgarnia Studencka
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
02-787 **Warszawa**, ul. Nowoursynowska 161

Księgarnia
Szkoła Główna Handlowa
02-554 **Warszawa**, al. Niepodległości 162

Księgarnia POLITECHNIKA
Politechnika Wrocławska (bud. A-1)
50-370 **Wrocław**, wyb. Wyspiańskiego 27

Księgarnia TECH
Politechnika Wrocławska (bud. D-1)
50-377 **Wrocław**, pl. Grunwaldzki 13

Księgarnia-Ksero ADUŚ
Instytut Matematyczny UWr.
50-314 **Wrocław**, pl. Grunwaldzki 2/4

Kiosk-Księgarnia
Akademia Rolnicza
50-357 **Wrocław**, ul. Grunwaldzka 53

Księgarnia ZETKA
Akademia Ekonomiczna
53-345 **Wrocław**, ul. Komandorska 118/120

Kiosk BOBRAS
Instytut Fizyki U.Wr.
50-204 **Wrocław**, pl. Maksa Borna 9

Księgarnia Wydawnictwa PŚ
Politechnika Śląska
44-100 **Zabrze**, ul. Roosevelta 26

Księgarnia AKADEMICKA
Uniwersytet Zielonogórski
65-625 **Zielona Góra**, al. Wojska Polskiego 69

Księgarnia UNIWERSYTECKA
Uniwersytet Zielonogórski
65-246 **Zielona Góra**, ul. Podgórna 50B, DS-1