Opracowanie
Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

ANALIZA MATEMATYCZNA 2

Kolokwia i egzaminy

Wydanie siódme uzupełnione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2005

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Printed in Poland.

Skład książki wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 83-89020-39-4

Wydanie VII uzupełnione, Wrocław 2005
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., tel. (0-71) 357 85 65, e-mail: gis@kom-net.pl
Druk: TINTA Sp. z o.o., e-mail: tinta@tinta.wroc.pl, tel. (0-71) 325 17 88

Spis treści

Wstęp

Niniejszy zbiór zawiera zestawy zadań, które w ubiegłych latach studenci Politechniki Wrocławskiej rozwiązywali na kolokwiach i egzaminach z **Analizy matematycznej 2**. Zadania z tych sprawdzianów obejmują całki niewłaściwe, szeregi liczbowe i potęgowe oraz rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych wraz z zastosowaniami w fizyce i technice. Do wszystkich zestawów egzaminacyjnych o numerach nieparzystych podane są odpowiedzi. Zbiór zawiera także komplet zestawów zadań z egzaminów na ocenę celującą wraz z odpowiedziami i wskazówkami.

Opracowanie pozwala studentom zapoznać się z rodzajami oraz stopniem trudności zadań kolokwialnych i egzaminacyjnych. Jest to jednocześnie dodatkowy materiał do samodzielnej nauki. Zestawy zadań z tego zbioru mogą być wykorzystywane przez wykładowców oraz prowadzących ćwiczenia na kolokwiach i egzaminach.

Zbiór zadań *„Kolokwia i egzaminy"* jest trzecią częścią zestawu podręczników do **Analizy matematycznej 2**. Pozostałymi częściami zestawu są *„Definicje, twierdzenia, wzory"* oraz *„Przykłady i zadania"*.

Do tego wydania podręcznika dołączono najnowszy zestaw zadań z egzaminu na ocenę celującą wraz z odpowiedziami. Ponadto poprawiono zauważone błędy i usterki. Dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej za zestawy zadań z kolokwiów i egzaminów, a także za uwagi o poprzednich wydaniach.

Marian Gewert
Instytut Matematyki
Politechnika Wrocławska
gewert@im.pwr.wroc.pl

Zbigniew Skoczylas
Instytut Matematyki
Politechnika Wrocławska
z.skoczylas@im.pwr.wroc.pl

Zestawy zadań z kolokwiów#

Pierwsze kolokwium

Zestaw I

Grupa A

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}$.

2. Funkcję $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$ rozwinąć w szereg Maclaurina i określić jego promień zbieżności.

3. Uzasadnić, że figura D ograniczona krzywą $y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}}$ oraz prostymi $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ ma skończone pole.

4. Niech $f(x,y,z) = e^{z-xy}$. Narysować zbiór punktów $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ spełniających warunek

$$f(x,y,z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z).$$

5. Obliczyć granicę $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{a-\sqrt{a^2-xy}}{xy}$, gdzie $a > 0$.

Grupa B

1. Niech $f(x,y,z) = e^{z+xy}$. Narysować zbiór punktów $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ spełniających warunek

$$f(x,y,z) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}(x,y,z).$$

Od roku akademickiego 2000/2001 na obu kolokwiach studenci otrzymują do rozwiązania w czasie 60 min. po 4 zadania.

2. Funkcję $f(x) = \ln\left(1 + 3x + 2x^2\right)$ rozwinąć w szereg Maclaurina i określić jego promień zbieżności.

3. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} 3^n$.

4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{x^3+1}$.

5. Zbadać, czy funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} xy}{x} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

Grupa C

1. Korzystając z definicji obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_{2\sqrt{3}}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}$.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\right)^n n!$.

3. Znaleźć szereg Maclaurina funkcji $f(x) = x^2 e^{-x}$ i określić przedział zbieżności tego szeregu.

4. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n^2+1}$.

5. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu i/lub całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$.

Grupa D

1. Korzystając z definicji obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{3}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

2. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{2^n+5^n}$.

3. Korzystając z odpowiednich twierdzeń z teorii szeregów uzasadnić równość

$$\lim_{n\to\infty}\frac{50^n}{n!} = 0.$$

4. Sformułować kryterium całkowe zbieżności lub rozbieżności szeregów. Korzystając z tego kryterium zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+8}$.

5. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{12^n}(x+3)^n.$$

Zestaw II

Grupa A

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$.

2. Uzasadnić zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\frac{1}{n^3}$.

3. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{ax^2+3y^2}{x^2+2y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest ciągła na płaszczyźnie? Odpowiedź uzasadnić.

4. Wyznaczyć równanie płaszczyny stycznej w punkcie $(1,1,z_0)$ do wykresu funkcji

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

5. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$.

Grupa B

1. Uzasadnić zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{x^2+\sin x}{x^4+\sin x}\,dx$.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{n^2+1}.$$

3. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest ciągła na płaszczyźnie? Odpowiedź uzasadnić.

4. Korzystając z różniczki funkcji dwóch zmiennych obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$0.97^{1.05} + 1.05^{0.97}.$$

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6\ln x$.

Grupa C

1. Uzasadnić zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{4x^3+\sqrt{x}}\,dx$.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n^2}$.

3. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ a & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
jest ciągła na płaszczyźnie? Odpowiedź uzasadnić.

4. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y,z) = \ln\left(x+y^2+z^3\right)$ w punkcie $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,-1)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 y + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Grupa D

1. Uzasadnić zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{2-\sin x}{2+\sin x} e^{-3x}\,dx$.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+2}.$$

3. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(ax^2+y^2\right)}{2x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
jest ciągła na płaszczyźnie? Odpowiedź uzasadnić.

4. Niech $u(x,y) = xy + xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$, gdzie f jest dowolną funkcją jednej zmiennej mającą ciągłą pochodną. Sprawdzić równość
$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = xy + u.$$

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 54\ln y$.

Zestaw III

Grupa A

1. Niech $g(u,v)$ będzie funkcją o ciągłych pochodnych cząstkowych drugiego rzędu spełniającą równanie
$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0.$$
Pokazać, że funkcja $f(x,y) = g\left(x^2-y^2, 2xy\right)$ spełnia równanie
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

2. Funkcję $f(x) = \dfrac{x}{1-x-2x^2}$ rozwinąć w szereg Maclaurina i określić przedział jego zbieżności.

3. Pokazać, że funkcja f określona wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
jest ciągła w punkcie $(0,0)$ i obliczyć $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

4. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót dookoła osi Ox krzywej
$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

5. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^3}}$.

Grupa B

1. Niech $f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, gdzie g jest funkcją jednej zmiennej dwukrotnie różniczkowalną. Sprawdzić, że zachodzi równość
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dg}{dr}.$$

2. Uzasadnić równość $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$.

3. Sprawdzić, czy funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2-y^2} & \text{dla} \quad |x| \neq |y|, \\ 0 & \text{dla} \quad |x| = |y| \end{cases}$$

ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

4. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całki niewłaściwej

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)^2}.$$

5. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+2}}$.

Grupa C

1. Niech g i h będą funkcjami jednej zmiennej dwukrotnie różniczkowalnymi. Uzasadnić, że funkcja

$$f(x,y) = \frac{x}{y}h(x) + g\left(\frac{y}{x}\right)$$

spełnia równanie

$$xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

2. Pokazać, że funkcja f określona wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ma obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $(0,0)$.

3. Funkcję $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x$ rozwinąć w szereg Maclaurina oraz określić przedział jego zbieżności.

4. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

5. Zbadać zbieżność warunkową szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+5}$.

Grupa D

1. Niech p i q będą dwukrotnie różniczkowalnymi funkcjami jednej zmiennej. Uzasadnić, że funkcja $f(x,y) = xp\left(-\frac{y}{x}\right) + q\left(\frac{x}{y}\right)$ spełnia równanie

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

2. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^3+1}$.

3. Zbadać istnienie pochodnej cząstkowej $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

4. Zbadać zbieżność warunkową szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

5. Wykorzystując rozwinięcie funkcji $f(x) = \ln(1+x)$ wyznaczyć szereg Maclaurina funkcji $g(x) = \ln\left(1+3x+2x^2\right)$ oraz określić przedział jego zbieżności.

Zestaw IV

Grupa A

1. Obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^n}$.

2. Niech $f(x,y) = \sqrt[3]{x^6-8y^3}$. Zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_1^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) dx$.

4. Napisać rozwinięcie funkcji $f(x) = \frac{x}{x+2}$ w szereg Taylora o środku w punkcie $x_0 = 3$.

5. Zbadać, czy istnieje granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^4+y^4\right)}{x^2+y^2}$.

Grupa B

1. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = x^2 + y^2$, która jest równoległa do płaszczyzny $3x - 6y + 2z - 17 = 0$.
2. Korzystając z twierdzeń o szeregach uzasadnić równość
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0.$$
Sformułować wykorzystywane twierdzenia.
3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{3^n + 2^n}$.
4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{9-x^2}}$.
5. Znaleźć punkty ciągłości funkcji f określonej wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{dla} \quad y \leqslant x^2, \\ 2x - 1 & \text{dla} \quad y > x^2. \end{cases}$$

Grupa C

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+5}$.
2. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.
3. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $\left(1, -\sqrt{3}, z_0\right)$ do wykresu funkcji $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.
4. Funkcję $f(x) = \frac{x}{3x+1}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Określić przedział zbieżności otrzymanego szeregu.
5. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{5^n + 3^n}$.

Grupa D

1. Sformułować kryterium całkowe zbieżności szeregów. Korzystając z tego kryterium zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 + 2}.$$

2. Obliczyć objętość bryły ograniczonej przez powierzchnię powstałą przez obrót wokół osi Ox krzywej $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$. Sporządzić rysunek.
3. Korzystając z twierdzeń o szeregach uzasadnić równość $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.
4. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n3^n}.$$
5. Niech $f(x,y) = \ln\left(x^2 + 3y\right)$. Obliczyć $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$.

Zestaw V

Grupa A

1. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej przez powierzchnię powstałą przez obrót dookoła osi Ox krzywej
$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)3^n}.$$
3. Określić i naszkicować dziedzinę funkcji $f(x,y) = \ln \frac{x+1}{y}$.
4. Zbadać, czy funkcja f określona wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
jest ciągła w punkcie $(0,0)$.
5. Dla funkcji $f(x,y) = e^{2y - x^3}$ obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Czy pochodne cząstkowe mieszane są równe?

Grupa B

1. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej przez powierzchnię powstałą przez obrót krzywej
$$y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}},$$
gdzie $0 < x \leqslant 1$, dookoła osi Ox.
2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n}}$.

3. Określić i naszkicować dziedzinę funkcji $f(x,y) = \sqrt{\frac{x-2}{y}}$.

4. Zbadać, czy funkcja f określona wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{3y} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

5. Dla funkcji $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$ obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Czy pochodne cząstkowe mieszane są równe?

Grupa C

1. Czy bryła V ograniczona przez powierzchnię powstałą przez obrót krzywej
$$y = \frac{1}{\sqrt{4-x}},$$
gdzie $0 \leqslant x < 4$, dookoła osi Ox ma skończoną objętość?

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n}{n^2+1}$.

3. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = xe^{-x^2}$. Wykorzystując otrzymane rozwinięcie obliczyć $f^{(5)}(0)$.

4. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(2,1,z_0)$ do wykresu funkcji
$$z = y\ln\left(2+x^2y-y^2\right).$$

5. Obliczyć pochodne cząstkowe mieszane rzędu drugiego funkcji
$$f(x,y) = \sin x^2y + \frac{\sqrt{x}}{y}.$$
Czy otrzymane pochodne są równe?

Grupa D

1. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej przez powierzchnię powstałą przez obrót dookoła osi Ox krzywej
$$y = \frac{1}{\sqrt{3+x^2}}.$$

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n^3}$.

3. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = x^2\cos 2x$. Wykorzystując otrzymane rozwinięcie obliczyć $f^{(4)}(0)$.

4. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(1,0,z_0)$ do wykresu funkcji
$$z = xe^{4xy-y^2}.$$

5. Obliczyć pochodne cząstkowe mieszane rzędu drugiego funkcji
$$f(x,y) = \cos xy^2 - \frac{x}{\sqrt{y}}.$$
Czy otrzymane pochodne są równe?

Zestaw VI

Grupa A

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{n}\right)^n$.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+5)^n}{n+30}.$$

3. Uzasadnić, że granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ nie istnieje.

4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$.

5. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_1^{\infty} \sqrt{e^{-x}}\,dx$.

Grupa B

1. Sformułować warunek konieczny zbieżności szeregów i na tej podstawie uzasadnić równość
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{3^n} = 0.$$

2. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)5^n}.$$

3. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$.

4. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int_0^{\infty} \frac{e^x+1}{e^{3x}+2}\,dx.$$

5. Obliczyć granicę $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,0)} \dfrac{\sin(xy)}{y^3}$.

Grupa C

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n - 3^n}{7^n - 5^n}$.

2. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$.

3. Zbadać, czy funkcja określona wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
ma pochodną cząstkową $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

4. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}(2-x)^n.$$

5. Promień podstawy stożka zmierzony z dokładnością 1 cm wynosi 3 m, a jego wysokość zmierzona z dokładnością 2 cm wynosi 4 m. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole powierzchni bocznej tego stożka?

Grupa D

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n^2-1}$.

2. Obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{3^n}$.

3. Korzystając z definicji obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_{-\infty}^{3} \dfrac{dx}{x^2+4x+13}$.

4. Niech $f(x,y) = \sqrt[5]{x^{10} - 32y^5}$. Zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

5. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\frac{1,01^3 - 2,98^2}{1,01^3 + 2,98^2}.$$

Zestaw VII

Grupa A

1. Obliczyć pole figury D ograniczonej wykresem funkcji $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}|x|}{x^2+1}$ i jej asymptotą w ∞.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sqrt[n]{\cos\dfrac{1}{n}}$. Sformułować wykorzystywane kryteria.

3. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = \dfrac{x}{3x-1}$. Podać przedział zbieżności otrzymanego szeregu.

4. Uzasadnić, że granica $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+y-3}{x^2+y^2-5}$ nie istnieje.

5. Równanie stanu gazu doskonałego ma postać $p = \dfrac{RT}{V}$, gdzie: p oznacza ciśnienie, T – temperaturę, V – objętość, R – stałą gazową. Obliczyć, wykorzystując różniczkę funkcji, jak należy zmienić objętość gazu przy wzroście temperatury o 2%, aby jego ciśnienie nie uległo zmianie.

Grupa B

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1-x^3}$. Sformułować wykorzystywane kryteria lub definicje.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{2n-1}}{n4^n}$. Podać wykorzystywane kryteria.

3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3^n}x^{2n}$.

4. Wyznaczyć i narysować dziedzinę funkcji
$$f(x,y) = \ln\frac{x^2+y^2+2y}{x+y}$$
oraz jej poziomicę dla poziomu $h = 0$.

5. Znaleźć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \arcsin\dfrac{xy}{x+y}$ w punkcie $(0,1)$ w kierunku wersora nachylonego pod kątem α do dodatniej części osi Ox. Dla jakiego kąta α, pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość najmniejszą?

Grupa C

1. Obliczyć pole figury D ograniczonej wykresem funkcji $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, gdzie $x \geqslant 0$ oraz jej asymptotą w ∞.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$. Sformułować wykorzystywane kryteria.

3. Wyznaczyć zbiór punktów nieciągłości funkcji f określonej wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} \arcsin\left(x^2+y^2\right) & \text{dla} \quad x^2+y^2 \leqslant 1, \\ \frac{\pi}{2}\cos xy & \text{dla} \quad x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

4. Uzasadnić równość $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$.

5. Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}$ funkcji określonej wzorem
$$F(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right),$$
gdzie funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na $\mathbb{R}^2$ oraz
$$x = \operatorname{arctg}\frac{v}{u}, \quad y = \sqrt{u^2+v^2}.$$
Wyrazić $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ za pomocą pochodnych cząstkowych $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}$ oraz zmiennych u i v.

Grupa D

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^2\sqrt{x}}\,dx$.

2. Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^2}.$$
Sformułować wykorzystywane kryteria.

3. Wyznaczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)3^n}$.

4. W celu wyznaczenia przenikalności elektrycznej polietylenu zmierzono pojemność oraz wymiary kondensatora płaskiego o izolacji polietylenowej uzyskując następujące wyniki: pojemność $C = (3 \pm 0.2)\cdot 10^{-9}$ F, powierzchnia okładzin $S = (150\pm 10)\cdot 10^{-4}$ m^2, grubość izolacji $d = (0.1 \pm 0,01)\cdot 10^{-3}$ m. Z jaką dokładnością można obliczyć przenikalność dielektryczną polietylenu używając wzoru $\varepsilon = \frac{Cd}{S}$?

5. Podać definicję pochodnej kierunkowej funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wersora $\vec{v}$. Obliczyć $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ dla funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^4}$ oraz wersora $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. W jakim kierunku pochodna ta jest największa?

Zestaw VIII

Grupa A

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{(x+1)^2}\,dx$.

2. Korzystając z twierdzeń o całkowaniu i/lub różniczkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n e^n}.$$

3. Określić dziedzinę funkcji $f(x,y) = \ln\left(2-x^2-y^2\right)$. Zbadać, czy jest ona zbiorem otwartym, domkniętym, ograniczonym. Naszkicować poziomice wykresu funkcji f.

4. Zbadać istnienie granicy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. Wyznaczyć wersor $\vec{v}$ wskazujący kierunek, w którym pochodna kierunkowa $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,1)$ funkcji $f(x,y) = \arcsin\frac{y}{x}$ ma wartość 0.

Grupa B

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^2 \frac{\cos x}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

2. Korzystając z twierdzeń o całkowaniu i/lub różniczkowaniu szeregów potęgowch obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(1-e)^{n-1}}.$$

3. Określić dziedzinę funkcji $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-1}$. Zbadać, czy jest ona zbiorem otwartym, domkniętym, ograniczonym. Naszkicować poziomice wykresu funkcji f.

4. Zbadać istnienie granicy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2 x}{xy}$.

5. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(0, 1, z_0)$ do wykresu funkcji
$$z = \frac{\operatorname{arctg} y}{1+x^2}.$$

Grupa C

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,dx$.
2. Korzystając z twierdzeń o całkowaniu i/lub różniczkowaniu szeregów potęgowch obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(1-e)^n}.$$
3. Określić dziedzinę funkcji $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2-1\right)$. Zbadać, czy jest ona zbiorem otwartym, domkniętym, ograniczonym. Naszkicować poziomice wykresu funkcji f.
4. Zbadać istnienie granicy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
5. Wiedząc, że funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu, znaleźć pochodne $\frac{\partial h}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial x}$ funkcji $h(x,y,z) = xf(yz, xz)$.

Grupa D

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{(x+2)^2}\,dx$.
2. Korzystając z twierdzeń o całkowaniu i/lub różniczkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} \frac{1}{n(n+1)}.$$
3. Określić dziedzinę funkcji $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$. Zbadać, czy jest ona zbiorem otwartym, domkniętym, ograniczonym. Naszkicować poziomice wykresu funkcji f.
4. Zbadać istnienie granicy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy^2}$.

5. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(1, \sqrt{3}, z_0)$ do wykresu funkcji
$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

Zestaw IX

Grupa A

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}}$, gdzie $a < b$. Czy całka $\int\limits_{-\infty}^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}}$ jest zbieżna?
2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite k, dla których szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n^k}$ jest zbieżny.
3. Wyznaczyć zbiór liczb rzeczywistych x, dla których szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos\pi}{(x+1)^n}$ jest zbieżny.
4. Niech $f(x,y,z) = e^{xy-z}$. Znaleźć i naszkicować zbiór punktów $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, dla których $f(x,y,z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}(x,y,z)$.
5. Przy pomocy różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\ln 1.02 \cdot \sin 358^\circ.$$

Grupa B

1. W zależności od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ zbadać ciągłość funkcji f określonej wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{dla} \quad y \geqslant 0, \\ \alpha & \text{dla} \quad y < 0. \end{cases}$$
Sprawdzić, czy zbiór punktów ciągłości funkcji f jest otwarty.
2. Znaleźć równania płaszczyzn stycznych do wykresu funkcji $z = \frac{x^2-y}{x+y+1}$ w punktach przecięcia tego wykresu z prostą $x = y = z$.
3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin x^2}{x^4}\,dx$ w zależności od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{3n}}{2^{5n+2}}$.

5. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (2n)!}{(n+1)!}.$$

Grupa C

1. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n+2} \right)$.
2. Wyznaczyć zbiór liczb rzeczywistych x, dla których szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n! \cos n\pi}{n^n}$$
jest zbieżny warunkowo.
3. Dla funkcji $f(x,y) = \sqrt{\ln \frac{x}{y} - 1}$ wyznaczyć i naszkicować zbiór
$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) < 0 \right\}.$$
4. Przy pomocy różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\frac{(5.1)^2 \cdot (2.9)^2}{1 + (2.9)^2}.$$
5. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_0^{\infty} e^{-x} \sin 3x \, dx$.

Grupa D

1. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{(n+1)^2}$.
2. Dla jakich wartości parametru $0 \leqslant \alpha < 2$ całka $\int\limits_{\alpha}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$ jest zbieżna?
3. Wyznaczyć zbiór liczb rzeczywistych x, dla których szereg potęgowy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(10x)^n}{2^n + 5^n}$$
jest rozbieżny.
4. Znaleźć równania płaszczyzn stycznych do wykresu funkcji $z = \ln \frac{x^2}{y}$ w punktach $(1, y_1, 1)$, $(1, -1, z_2)$.

5. Znaleźć i naszkicować dziedzinę naturalną funkcji $f(x,y) = \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ oraz jej poziomice odpowiadające poziomom $h = 0$ i $h = \sqrt{3}$. Czy funkcja f jest ciągła w punkcie $(0,1)$?

Zestaw X

Grupa A

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n}$.
2. Znaleźć szereg Maclaurina funkcji $f(x) = xe^{-x^2}$ i na tej podstawie obliczyć $f^{(7)}(0)$.
3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{x \, dx}{\sqrt[3]{x^6 + 2x^2}}.$$
4. Wyznaczyć i narysować dziedzinę funkcji
$$f(x,y) = \arcsin \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$
Do jakich klas zbiorów można zaliczyć otrzymaną dziedzinę?
5. Zbadać istnienie granicy $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$.

Grupa B

1. Korzystając z definicji obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} \, dx$.
2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.
3. Znaleźć szereg Maclaurina funkcji $f(x) = \frac{x}{4 + x^2}$ i jego promień zbieżności.
4. Wyznaczyć zbiór punktów ciągłości funkcji f określonej wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} \sin xy & \text{dla} \quad x \neq y, \\ 0 & \text{dla} \quad x = y. \end{cases}$$
5. Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ funkcji $u(x,y,z) = \left(x + z^2\right)^{\sqrt{yz}}$.

Grupa C

1. Dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, funkcja f określona wzorem
$$f(x,y)=\begin{cases}\alpha\sqrt{x^2+y^2} & \text{dla} \quad x^2+y^2 \leqslant 4,\\ 8-(x^2+y^2) & \text{dla} \quad x^2+y^2>4\end{cases}$$
jest ciągła? Narysować wykres tej funkcji.

2. Obliczyć granicę $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$.

4. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\ln n}$.

5. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)^{2n}}{(n^3+1)^n}$.

Grupa D

1. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{1}{4^n}$.

2. Obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{\sqrt[3]{x^5}}\,dx$.

4. Wyznaczyć i naszkicować poziomice oraz wykres funkcji $g(x,y)=-x-y^2$.

5. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(2,1,z_0)$ do wykresu funkcji $z=x^{xy}$

Drugie kolokwium

Zestaw I

Grupa A

1. Niech $z=f(x,y)$, gdzie $x=p(t)$, $y=r(t)$. Obliczyć $z'(t)$ oraz $z''(t)$.

2. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\frac{(2,03)^4}{(3,998)^2}.$$

3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dane są punkty $A=(1,2,3)$, $B=(2,4,6)$. Na płaszczyźnie $x=0$ znaleźć punkt P taki, aby suma AP^2+BP^2 była najmniejsza.

4. W całce iterowanej
$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{3} f(x,y)\,dy$$
dokonać zmiany kolejności całkowania. Narysować obszar całkowania.

5. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$z=3\left(x^2+y^2\right),\quad z=4-\sqrt{x^2+y^2}.$$
Sporządzić rysunek bryły U.

Grupa B

1. Niech $z=f(x)$, gdzie $x=g(u,v)$. Obliczyć pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$.

2. Masa ciała zważonego z dokładnością 20 g wynosi $M = 4000$ g, a jego objętość zmierzona z dokładnością $1\,\text{cm}^3$ wynosi $V = 800\,\text{cm}^3$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć gęstość tego ciała?

3. W pierwszej ćwiartce $(x>0, y>0)$ znaleźć ekstrema lokalne funkcji
$$f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y.$$

4. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_{-1}^{1} dx \int_0^{e^{|x|}} f(x,y)\,dy.$$
Narysować obszar całkowania.

5. Obliczyć moment bezwładności cienkiej jednorodnej tarczy kołowej o promieniu R i masie M. Moment obliczyć względem osi symetrii tarczy, która jest do niej prostopadła. Sporządzić rysunek.

Grupa C

1. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(1,0,z_0)$ do powierzchni
$$z=\operatorname{arctg}\frac{1-xy}{x+y}.$$

2. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\sqrt[3]{3.03^3+4.06^3+4.97^3}.$$

3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

4. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Narysować obszar całkowania.

5. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zastosować współrzędne biegunowe. Sporządzić rysunek.

Grupa D

1. Podać definicję pochodnej kierunkowej funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wersora $\vec{v} = (v_x, v_y)$. Obliczyć $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ dla $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (3, -4)$, $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2. Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej wyraża się wzorem $S = \frac{at^2}{2}$. Przyspieszenie zmierzone z dokładnością $\Delta_a = 0.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ wynosi $a = 8.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, a czas zmierzony z dokładnością $\Delta_t = 0.002$ s wynosi $t = 4.000$ s. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć drogę?

3. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami

$$z = 3,\ \ z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}.$$

Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne biegunowe.

4. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x-2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Sporządzić rysunek obszaru całkowania.

5. Liczbę 9 rozłożyć na trzy dodatnie składniki tak, aby ich iloczyn był największy.

Zestaw II

Grupa A

1. Obliczyć objętość obszaru U ograniczonego przez powierzchnie

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2},\ z = 4.$$

Sporządzić rysunek tego obszaru. Zastosować współrzędne walcowe.

2. Jednorodna cienka płytka o masie M ma kształt kwadratu o boku a. Obliczyć moment bezwładności tej płytki względem osi prostopadłej do kwadratu i przechodzącej przez jego środek.

3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = (x^2 - 2y)\,e^{-y}$.

4. Napisać równanie stycznej do krzywej $xe^y + ye^x = e^{xy}$ w punkcie przecięcia tej krzywej z osią Ox.

5. W całce iterowanej

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{2+x}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$$

zmienić kolejność całkowania. Narysować obszar całkowania.

Grupa B

1. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x-1}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Narysować obszar całkowania.

2. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej przez warunek

$$x^2 - xy - y^2 + 5 = 0.$$

3. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy,$$

gdzie $D = \{(x,y) : y \geqslant 0, 2y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2x\}$. Narysować obszar D.

4. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ w punkcie $(x_0, y_0) = (3, -4)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

5. Spośród prostopadłościanów o ustalonej długości przekątnej $p = 2\sqrt{3}$ znaleźć ten, który ma największą objętość.

Grupa C

1. Obliczyć objętość bryły V ograniczonej powierzchniami

$$z = \sqrt{3 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{3\,(x^2 + y^2)},\ z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}.$$

Sporządzić rysunek tej bryły. Zastosować współrzędne sferyczne.

2. Wyznaczyć siłę $\vec{F}$, z jaką jednorodny półpierścień o masie M, promieniu wewnętrznym r i promieniu zewnętrznym R, przyciąga masę punktową m umieszczoną w jego środku.
3. Niech $f(x,y) = x^3 - y^3$. Znaleźć wersory $\vec{v}$, dla których spełniony jest warunek
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,-1) = 0.$$
4. W punkcie $x_0 = 0$ obliczyć drugą pochodną funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej przez warunek $xe^{-y} + y^3 + 8 = 0$.
5. Spośród trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu R znaleźć ten, który ma największe pole. Wyznaczyć kąty tego trójkąta.

Grupa D

1. Jednorodny walec o masie M ma promień podstawy R i wysokość H. Obliczyć moment bezwładności walca względem jego tworzącej.
2. W całce iterowanej uzupełnić granice całkowania tak, aby zachodziła równość
$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}-1}^{0} f(x,y,z)\,dz = \int dz \int dx \int f(x,y,z)\,dy.$$
Narysować obszar całkowania.
3. Obliczyć pole płata wyciętego z powierzchni $z = \sqrt{1-y^2}$ przez powierzchnię $x^2 + y^2 = 1$. Sporządzić rysunek.
4. W pierwszej ćwiartce $(x > 0, y > 0)$ znaleźć ekstrema lokalne funkcji
$$f(x,y) = xy \ln\left(x^2 + y^2\right).$$
5. Na krzywej $8x^3 + y^3 - 8xy = 0$ znaleźć punkty, w których styczne do niej są prostopadłe do prostej $y = x$.

Zestaw III

Grupa A

1. Obszar D ograniczony jest krzywymi $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{x^2}{2}$. Obliczyć
$$\iint_D |1 - xy|\,dxdy.$$
2. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ na obszarze
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0,\ \ x + y \leqslant 0,\ \ 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\right\}.$$

3. Obliczyć całkę potrójną
$$\iiint_U (2z - x)\,dxdydz,$$
gdzie U jest czworościanem o wierzchołkach $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,1,1)$, $D = (1,1,1)$.
4. Korzystając z metod rachunku różniczkowego funkcji dwóch zmiennych wyznaczyć punkty prostokąta $R = [-1,1] \times \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, w których funkcja $f(x,y) = \sin x \cos(x+y)$ osiąga najmniejszą oraz największą wartość.
5. Funkcja uwikłana $y = y(x)$ zadana jest równaniem $\dfrac{y}{x} - \ln y + x = 0$. Obliczyć pochodną $y'(x)$. Czy istnieją punkty $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ takie, że $y(x) = x$ oraz $y'(x) = 0$?

Grupa B

1. Przy pomocy całki podwójnej obliczyć pole figury D ograniczonej krzywymi
$$y = e^x,\ y = \ln x,\ x + y = 1,\ x = 2.$$
2. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\,dxdy,$$
gdzie $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0,\ x \geqslant 0\right\}$.
3. Niech $f(x,y) = yx^3e^x$ oraz niech $u = x \operatorname{arctg} y$, $v = x^3$. Dla funkcji $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ obliczyć $\dfrac{\partial F}{\partial v}$.
4. Znaleźć ekstrema funkcji uwikłanej $y = y(x)$ zadanej równaniem
$$(x-y)^2 = y + xy - 3x.$$
5. Korzystając ze współrzędnych walcowych obliczyć objętość bryły U ograniczonej stożkiem $z = \sqrt{x^2+y^2}$ oraz paraboloidą $z = x^2 + y^2$.

Grupa C

1. Obliczyć pochodne funkcji uwikłanych $y = y(x)$ oraz $x = x(y)$ zadanych równaniem $e^{x+y} = x^2 - y^2 + 1$ w punkcie $(1,-1)$. Odpowiedź uzasadnić.
2. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = y \ln\left(y + x^2\right)$.
3. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D x\,dxdy,$$

gdzie D jest figurą ograniczoną krzywymi $y = \sqrt{x}$, $y = -x^2$, $5y - 3x = 8$, $y = x - 2$.

4. Wyznaczyć wartość parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, dla której powierzchnia $z = \alpha x y^2$ rozcina walec
$$W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4y \leqslant 0,\ -1 \leqslant z \leqslant 5\right\}$$
na dwie części o równych objętościach.

5. Dla obszaru U ograniczonego powierzchniami $x = 0$, $x + |y| = 2$, $z = 5$, $z = xy$ obliczyć całkę potrójną
$$\iiint\limits_U \frac{2xy}{z+2}\, dxdydz.$$

Grupa D

1. Obliczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej warunkiem
$$\frac{x^3}{3} + x^2 = y^3 + y + \frac{2}{3}.$$

2. Całkę potrójną
$$\iiint\limits_U z\, dxdydz,$$
gdzie U jest kulą o środku w punkcie $(0, 0, -1)$ i promieniu 1, zapisać w postaci dowolnej całki iterowanej we współrzędnych kartezjańskich. Dokonać zamiany zmiennych w tej całce na współrzędne sferyczne.

3. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$y = x,\quad y = x^2,\quad z = 2x + 4,\quad z = 2\left(x^2 + y^2\right).$$

4. Obliczyć całkę podwójną $\iint\limits_D (y+1)\, dxdy$, jeżeli obszar całkowania D określony jest nierównościami $x^2 + y^2 + 2x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$.

5. Niech $f(x,y) = x(x - y)$ oraz niech $u = x + y$, $v = x^2 - y$. Dla funkcji $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ obliczyć $\dfrac{\partial F}{\partial u}$.

Zestaw IV

Grupa A

1. Wykorzystując twierdzenia o ekstremach funkcji dwóch zmiennych obliczyć odległość początku układu współrzędnych od płaszczyzny $2x + 3y + z = 12$.

2. Znaleźć równanie stycznej do krzywej $3x^2 - 2xy + xy^3 = 7$ w punkcie $(1, 2)$.

3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^3 - 4xy + 2y^2$.

4. Wykorzystując współrzędne biegunowe obliczyć całkę podwójną
$$\iint\limits_D y\, dxdy,$$
gdzie $D = \left\{(x, y) : y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \leqslant 2x\right\}$.

5. Znaleźć środek masy bryły V ograniczonej powierzchniami
$$z = \sqrt{x^2 + y^2},\quad z = 2,$$
jeżeli gęstość masy dana jest wzorem $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Grupa B

1. Znaleźć współrzędne środka masy jednorodnego płaskiego obszaru D ograniczonego krzywą $y = e^x$ oraz prostymi $y = 0$, $x = 0$ i $x = 1$.

2. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami
$$z = 2\left(x^2 + y^2\right),\quad z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y) = xy + y$ na zbiorze $D = \{(x, y) : 6x + 4y = 24,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

4. Ile różniczkowalnych funkcji uwikłanych $y = y(x)$ na otoczeniu punktu $x_0 = 1$ określa równanie
$$x^3 + xy + y^2 = 4 - x?$$
Dla każdej z tych funkcji znaleźć jej wartość i pierwszą pochodną w punkcie $x_0 = 1$.

5. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$ w punkcie $(x_0, y_0, z_0) = (3, 4, 5)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

Grupa C

1. Obliczyć $y'(0)$ oraz $y''(0)$ funkcji uwiłanej $y = y(x)$ określonej równaniem $xe^y - y + 1 = 0$.

2. Wykorzystując współrzędne biegunowe obliczyć całkę podwójną
$$\iint\limits_D \cos\left(x^2 + y^2\right) dxdy,$$
gdzie $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

3. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2-1}^{x^2} f(x, y)\, dy.$$

Narysować obszar całkowania

4. Wyznaczyć środek masy bryły U ograniczonej powierzchniami
$$z = x^2 + y^2 - 2, \quad z = 1 - 2\left(x^2 + y^2\right),$$
jeżeli gęstość masy dana jest wzorem $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

5. Obliczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y) = x^2 - y^2$ na kole domkniętym o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 2.

Grupa D

1. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$z = y^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = -1.$$

2. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y) = x^2 y$ na kole domkniętym o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 1.

3. Znaleźć równanie prostej prostopadłej do krzywej $x^3 - xy + y^2 = 4$ w punkcie $(0, -2)$.

4. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\sqrt[3]{(3.02)^2 + (4.01)^2 + (5.1)^2}.$$

5. Przechodząc do współrzędnych biegunowych obliczyć pole figury D ograniczonej krzywymi:
$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = x, \quad y = 0.$$

Zestaw V

Grupa A

1. Znaleźć wymiary prostopadłościanu o polu powierzchni całkowitej $P = 24$, który ma największą objętość.

2. Obliczyć $y''(1)$ funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem
$$x^2 + xy + y^2 - 2x - 1 = 0$$
oraz spełniającej warunek $y(1) = 1$.

3. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć całkę z funkcji $f(x, y, z) = z$ po obszarze U określonym nierównościami
$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4, \quad x \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$$

4. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_{-1}^{1} dx \int_{2x^2-1}^{x^2} f(x, y)\, dy.$$
Narysować obszar całkowania.

5. Obliczyć pole płata Σ wyciętego z powierzchni $z = 1 - x^2 - y^2$ przez powierzchnię $x^2 + y^2 = 2$. Zastosować współrzędne biegunowe. Sporządzić rysunek.

Grupa B

1. Wśród prostopadłościanów o ustalonej długości przekątnej $p = \sqrt{3}$ znaleźć ten, który ma największą objętość.

2. Obliczyć $y''(0)$ funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem
$$xe^y - y + 1 = 0$$
i spełniającej warunek $y(0) = 1$.

3. Obliczyć objętość obszaru U ograniczonego powierzchniami
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 2 - x^2 - y^2.$$
Wprowadzić współrzędne biegunowe. Sporządzić rysunek.

4. Naszkicować obszar całkowania oraz zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_{0}^{1} dy \int_{-2+\sqrt{2y-y^2}}^{1} f(x, y)\, dx.$$

5. Obliczyć całkę potrójną z funkcji $f(x, y, z) = xy$ po obszarze U ograniczonym powierzchniami
$$x + z = 1, \quad x + z = 2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad y = 3.$$

Grupa C

1. Dla funkcji $z = \arcsin \dfrac{x}{y}$ obliczyć $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ oraz $\dfrac{dz}{dx}$, jeśli $y = \sqrt{1 + x^2}$.

2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

3. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $z = x^2 - y^2$ na obszarze
$$D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}.$$

4. Stosując współrzędne biegunowe obliczyć pole figury D ograniczonej krzywą
$$\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4x^2 y^2.$$

5. Wyznaczyć współrzędne środka masy jednorodnej bryły U ograniczonej powierzchniami $z = 3 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

Grupa D

1. Niech $z = x^y$. Obliczyć $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ w punkcie $(x_0, y_0) = (4, 1)$.
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $z = x^3 + y^3 - 3xy$.
3. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji
$$z = x^2y(2 - x - y)$$
na trójkącie D ograniczonym prostymi $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.
4. Stosując współrzędne biegunowe obliczyć pole figury D ograniczonej krzywą
$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2x^3.$$
5. Wyznaczyć moment bezwładności jednorodnego walca o wysokości h, promieniu R i masie M, względem średnicy podstawy.

Zestaw VI

Grupa A

1. Zamówiono $1\,\mathrm{m}^3$ korka o gęstości masy $0.25 \pm 0.05\,\dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Z jaką, w przybliżeniu, dokładnością można obliczyć masę zamówionego towaru, jeżeli wiadomo, że jego objętość określono z dokładnością $0.05\,\mathrm{m}^3$?
2. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych równaniem
$$x^2 + xy + y^2 + x - y - 2 = 0.$$
3. Naszkicować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_0^2 dx \int_{-x^2}^{2-\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x, y)\, dy.$$
4. Wykorzystując całkę podwójną obliczyć pole obszaru D określonego nierównościami
$$y \leqslant x, \quad y \geqslant -x, \quad x^2 + y^2 \leqslant 2x.$$
5. Zamienić całkę potrójną
$$\iiint_U f(x, y, z)\, dxdydz$$
na całkę iterowaną, jeśli obszar U jest ograniczony powierzchniami $z = \sin x$, $y = 0$, $y = 2x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Grupa B

1. W biegu na $100\,\mathrm{m}$ odległość mierzona jest z dokładnością $0.1\,\mathrm{m}$, a czas z dokładnością $0.01\,\mathrm{s}$. Z jaką, w przybliżeniu, dokładnością obliczona zostanie średnia prędkość zawodnika, który uzyskał czas $10\,\mathrm{s}$?
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x + y$.
3. Obliczyć wartość średnią funkcji
$$f(x, y) = e^x$$
na obszarze D ograniczonym prostymi $y = x$, $x = 1$, $y = 2x$.
4. Obliczyć pole płata Σ odciętego z powierzchni $z = x^2 + y^2$ przez powierzchnię $z = 1 - x^2 - y^2$.
5. Zamienić całkę potrójną
$$\iiint_U f(x, y, z)\, dxdydz$$
na całkę iterowaną, jeśli obszar U jest ograniczony powierzchniami
$$y = 0, \; y = \sqrt{1 - x^2}, \; z = 4, \; z = 4y.$$

Grupa C

1. Na podstawie pomiarów bryłki substancji ustalono, że jej objętość wynosi $15 \pm 1\,\mathrm{cm}^3$, a masa $105 \pm 5\,\mathrm{g}$. Z jaką, w przybliżeniu dokładnością można obliczyć gęstość masy tej substancji?
2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji
$$f(x, y) = 2x^2 - y^2$$
na obszarze D określonym nierównościami $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $x \geqslant 0$.
3. Naszkicować obszar całkowania i zmienić kolejność całkowania w wyrażeniu
$$\int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x, y)\, dx + \int_1^2 dy \int_1^{3-y} f(x, y)\, dx.$$
4. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć pole części wykresu funkcji $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ odciętej walcem $x^2 + y^2 = 2y$.
5. Zmienić całkę potrójną
$$\iiint_U f(x, y, z)\, dxdydz$$
na całkę iterowaną, jeśli obszar U jest ograniczony powierzchniami
$$z = 1 - y^2, \; x = 0, \; x = 2, \; y = 0, \; z = y.$$

Grupa D

1. Na podstawie pomiarów ustalono, że objętość walca wynosi $600\pi \pm 10\pi$ mm^3, a jego wysokość 150 ± 1 mm. Z jaką, w przybliżeniu, dokładnością można obliczyć średnicę tego walca?
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = (x - y^2)\, e^{-x}$.
3. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć całkę
$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\, dxdy,$$
gdzie $D = \{(x,y) : y \geqslant x,\ y \geqslant -x,\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$.
4. Stosując całkę podwójną obliczyć pole powierzchni płata Σ o równaniu $z = \sqrt{1-x^2}$ odciętego płaszczyznami $y=0$, $y=\sqrt{2}$.
5. Zamienić całkę potrójną
$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\, dxdydz$$
na całkę iterowaną, jeśli obszar U jest ograniczony płaszczyznami
$$x=0,\ z=0,\ x+y=3,\ x+3y=3,\ 5x+3z=15.$$

Zestaw VII

Grupa A

1. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ w punkcie $(1,2)$ w kierunku wersora tworzącego kąt $\dfrac{\pi}{3}$ z dodatnim kierunkiem osi Ox.
2. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem
$$x^3 + y^3 - 18xy = 0.$$
3. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_0^1 dy \int_{-2+\sqrt{2y-y^2}}^{1} f(x,y)\, dx.$$
4. Obliczyć moment statyczny względem płaszczyzny xOz jednorodnego obszaru U o masie M określonego nierównościami
$$1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 3,\quad y \geqslant 0,\quad z \geqslant 0.$$
Zastosować współrzędne sferyczne.
5. Obliczyć pole płata Σ wyciętego z powierzchni $z = 2 - 2\sqrt{x^2+y^2}$ przez walec $x^2 - 2x + y^2 = 0$. Zastosować współrzędne biegunowe. Sporządzić rysunek.

Grupa B

1. Korzystając z definicji obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \sqrt[4]{|xy|}$ w punkcie $(1,1)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem
$$x^2 - xy = y^2 - 5.$$
3. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednorodnego obszaru V o masie M ograniczonego powierzchniami $z = x^2 + y^2$, $z = 9$. Zastosować współrzędne walcowe. Sporządzić rysunek.
4. Obliczyć pole płata Σ wyciętego z powierzchni $z = 4 + x^2 + y^2$ przez walec $x^2 + y^2 = 5$.
5. Naszkicować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_1^2 dy \int_0^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\, dx$$

Grupa C

1. Napisać równanie stycznej w punkcie $(1,1)$ do krzywej określonej równaniem
$$4x^2 + y^2 - 6xy + x = 0.$$
2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y) = xy^2 + 4xy - 4x$ na prostokącie $R = [-3,3] \times [-3,0]$.
3. Obliczyć objętość obszaru U ograniczonego powierzchniami
$$x^2+y^2+z^2 = 4,\ x^2+y^2 = 2x.$$
Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne walcowe.
4. Naszkicować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_0^1 dx \int_0^{2-\sqrt{-x^2+2x}} f(x,y)\, dy.$$
5. Wyznaczyć współrzędne środka masy bryły ograniczonej płaszczyzną $z=0$ oraz powierzchniami
$$z = -\sqrt{4-x^2-y^2},\quad z = -\sqrt{1-x^2-y^2},$$
jeżeli gęstość masy wyraża się wzorem
$$\gamma(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$
Zastosować współrzędne sferyczne. Sporządzić rysunek.

Grupa D

1. Wyznaczyć wersor $\vec{v}$ wskazujący kierunek, w którym pochodna kierunkowa $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,-1)$ funkcji $f(x,y)=e^{x^2+3y}$ ma wartość zero.
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=6xy-x^3-y^3+3$.
3. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_0^1 dx \int_{-1}^{2-\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy.$$
4. Obliczyć moment bezwładności względem początku układu współrzędnych jednorodnego obszaru U o masie M ograniczonego powierzchniami $z=2\sqrt{x^2+y^2}$, $z=4$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne walcowe.
5. Obliczyć objętość obszaru U ograniczonego powierzchniami
$$x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2-2x=0.$$
Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne walcowe.

Zestaw VIII

Grupa A

1. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=y^3+x^2y+4x-7y$.
2. Znaleźć wersor $\vec{v}$, dla którego pochodna kierunkowa $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,1)$ funkcji $f(x,y)=\arcsin\frac{y}{x}$ jest równa zeru.
3. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w wyrażeniu
$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_{\sqrt{4x-x^2-3}}^{\sqrt{\frac{x}{2}}} f(x,y)\,dy.$$
4. Obliczyć objętość bryły U określonej nierównościami:
$$0 \leqslant z \leqslant 4-x^2,\quad x^2+y^2 \leqslant 4.$$
5. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednorodnej bryły U o masie M określonej nierównościami:
$$\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}.$$
Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne walcowe.

Grupa B

1. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem
$$y^3+2xy+x^2=0.$$
2. Na podstawie pomiarów ustalono, że objętość ciała wynosi $V=20\pm1\,\mathrm{cm}^3$, a jego masa $M=125\pm5\,\mathrm{g}$. Z jaką, w przybliżeniu, dokładnością można obliczyć gęstość masy tego ciała?
3. Za pomocą całki podwójnej obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi $y^2=4x$, $x+y=3$.
4. Dla całki
$$\int_{-2}^{2} dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^{4} f(x,y,z)\,dz$$
narysować obszar całkowania, a następnie zmienić porządek całkowania według kolejności
$$\int dz \int dy \int f(x,y,z)\,dx.$$
5. Obliczyć moment bezwładności jednorodnej kuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z$ o masie M względem początku układu współrzędnych.

Grupa C

1. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$.
2. Korzystając z reguł różniczkowania funkcji złożonych obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$, jeśli $z=f(x,y)$, gdzie $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Obliczyć te same pochodne, jeśli $z=g(x)$.
3. Obliczyć pole części sfery Σ określonej równaniem $x^2+y^2+z^2=9$ leżącej wewnątrz stożka $z=\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$.
4. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $z=4-x^2$, $z=4-y^2$, $z=0$.
5. Znaleźć położenie środka masy jednorodnej półkuli o promieniu R.

Grupa D

1. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y)=xy(6-x-y)$ na obszarze domkniętym ograniczonym prostymi $x=0$, $y=0$, $x+y=10$.
2. Znaleźć równanie stycznej do krzywej danej równaniem
$$\cos xy - x - 2y = 0$$
w punkcie jej przecięcia z osią Ox.

3. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej

$$\int_{-1}^{1} dy \int_{1-\sqrt{\frac{1-y}{2}}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

4. Obliczyć całkę potrójną

$$\iiint\limits_U \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

gdzie U jest obszarem określonym nierównością $x^2+y^2+z^2 \leqslant x$.

5. Obliczyć masę obszaru ograniczonego krzywymi $x = 2y^2$, $x = 3 + y^2$, jeśli gęstość powierzchniowa masy jest określona wzorem $\sigma(x,y) = |y|$.

Zestaw IX

Grupa A

1. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(2, 4, z_0)$ do wykresu funkcji $z = x^y$.
2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y) = xy(4-x-y)$ na trójkącie ograniczonym prostymi $x = 1$, $y = 1$, $y + x = 6$.
3. Obliczyć całkę podwójną $\iint\limits_D xy\,dxdy$, jeżeli obszar całkowania D określony jest nierównościami $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.
4. Wprowadzając współrzędne sferyczne sprowadzić całkę potrójną

$$\iiint\limits_U xy^2z^3\,dxdydz,$$

gdzie $U = \{(x,y,z) : 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ z \leqslant 0\}$, do iloczynu całek pojedynczych.

5. Obliczyć masę obszaru płaskiego D o gęstości $\sigma(x,y) = xy$ ograniczonego krzywymi $y^2 = x$, $x = 3y$.

Grupa B

1. Znaleźć ekstrema funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0.$$

2. Obliczyć całkę podwójną $\iint\limits_D xy\,dxdy$, jeżeli obszar całkowania D określony jest nierównościami $x \geqslant 0$, $x^2+y^2 \leqslant 4$.

3. Wprowadzając współrzędne sferyczne sprowadzić całkę potrójną

$$\iiint\limits_U x^2y^3z\,dxdydz,$$

gdzie $U = \{(x,y,z) : 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9,\ z \geqslant 0\}$, do iloczynu całek pojedynczych.

4. Obliczyć objętość obszaru U ograniczonego powierzchniami

$$z = x^2+y^2,\ z = 3 - 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

5. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \sqrt{x} + \cos 2x^2y$ w punkcie $(x_0, y_0) = \left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Grupa C

1. Obliczyć całkę podwójną $\iint\limits_D x\,dxdy$, jeżeli obszar całkowania D określony jest nierównością $x^2+y^2 \leqslant 2x$.
2. Wprowadzając współrzędne sferyczne sprowadzić całkę potrójną

$$\iiint\limits_U x^3yz^2\,dxdydz,$$

gdzie $U = \{(x,y,z) : 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9,\ y \leqslant 0\}$, do iloczynu całek pojedynczych.

3. Obliczyć moment bezwładności względem osi Ox trójkąta o wierzchołkach $A = (0,-1)$, $B = (0,1)$, $C = (1,0)$ i gęstości masy $\sigma(x,y) = x$.
4. Na płaszczyźnie znaleźć punkty, w których gradient funkcji

$$f(x,y) = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$$

jest równy wektorowi $\vec{a} = \left(1, -\frac{16}{9}\right)$.

5. W półpłaszczyźnie $x > 0$ wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}.$$

Grupa D

1. Wprowadzając współrzędne sferyczne sprowadzić całkę potrójną

$$\iiint\limits_U x^2yz^3\,dxdydz,$$

gdzie $U = \{(x,y,z) : 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 16,\ x \geqslant 0\}$, do iloczynu całek pojedynczych.

2. Obliczyć położenie środka masy jednorodnego obszaru D ograniczonego parabolami $y = \frac{x^2}{4}$, $x = \frac{y^2}{4}$.
3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\sqrt[3]{(2.9)^3 + (4.1)^3 + (3.8)^3}$.
4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y + 3$.
5. Obliczyć całkę podwójną $\iint\limits_D y\,dxdy$, jeżeli obszar całkowania D określony jest nierównością $x^2 + y^2 \leqslant 4y$.

Zestaw X

Grupa A

1. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$.
2. Napisać równanie stycznej do krzywej $xe^y + ye^x = e^{xy}$ w punkcie przecięcia tej krzywej z osią Oy.
3. Obliczyć masę obszaru D ograniczonego krzywymi
$$y = \sqrt{6x - x^2},\ \ y = \sqrt{3}x,\ \ y = 0,$$
jeżeli gęstość powierzchniowa masy określona jest wzorem $\sigma(x,y) = xy$.
4. Obliczyć całkę potrójną
$$\iiint\limits_U \sqrt{x}\,dxdydz,$$
gdzie obszar U ograniczają powierzchnie $z = \sin y$, $z = 0$, $y = 0$, $y = \pi$, $x = 1$, $x = 4$.
5. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$z = x^2 + y^2 - 4,\ \ z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}.$$
Sporządzić rysunek

Grupa B

1. Wyznaczyć lokalne ekstrema funkcji $f(x,y) = \sqrt{e^x}\left(x + y^2\right)$.
2. Wyznaczyć wersor $\vec{v}$ tak, aby pochodna kierunkowa funkcji
$$f(x,y) = \frac{y}{x} + \cos\left(y^2x\right)$$
w punkcie $(1,0)$ w kierunku tego wersora miała wartość 0.

3. Obliczyć moment statyczny względem osi Oy obszaru D ograniczonego krzywymi
$$x = -\sqrt{2y - y^2},\ \ x = -\sqrt{4y - y^2},\ \ x = 0,$$
jeżeli gęstość powierzchniowa masy określona jest wzorem $\sigma(x,y) = y$.
4. Obliczyć całkę potrójną
$$\iiint\limits_U x^2 \sin \pi y\,dxdydz,$$
gdzie obszar U ograniczają powierzchnie $z = 1 - x^2$, $z = 0$, $y = 0$, $y = 1$.
5. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$z = \sqrt{x^2+y^2} - 3,\ \ x^2 + y^2 = 4,\ \ z = 3 - x^2 - y^2.$$
Sporządzić rysunek bryły U.

Grupa C

1. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y) = xy^2 + 1$ na zbiorze D określonym nierównością $x^2 + y^2 \leqslant 1$.
2. Równanie $xy - e^y + x = 0$ określa na pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0) = (1,0)$ funkcję uwikłaną $y = y(x)$. Obliczyć $y'(1)$ oraz $y''(1)$.
3. Obliczyć współrzędne środka masy jednorodnego obszaru D ograniczonego krzywymi
$$y = -\sqrt{1-x^2},\ \ y = -\sqrt{9-x^2},\ \ y = -|x|.$$
4. Obliczyć całkę potrójną
$$\iiint\limits_U y\cos x\,dxdydz,$$
gdzie obszar U ograniczają powierzchnie $z = y^2$, $z = -y$, $x = 0$, $x = 2$.
5. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$z = 1 - \sqrt{x^2+y^2},\ \ x^2 + y^2 + 4z = 0.$$
Sporządzić rysunek tej bryły.

Grupa D

1. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ zadanej równaniem
$$x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0.$$
2. Wyznaczyć wersor $\vec{v}$, w kierunku którego przyrosty funkcji
$$f(x,y) = (y+1)^x - ex$$
od punktu $(e,0)$ są najmniejsze.

3. Obliczyć moment statyczny względem osi Ox obszaru D ograniczonego krzywymi
$$y = -\sqrt{4x - x^2}, \quad y = -x,$$
gdy gęstość powierzchniowa masy ma postać $\sigma(x, y) = x$.

4. Obliczyć całkę potrójną
$$\iiint\limits_U e^y \, dx dy dz,$$
gdzie obszar U ograniczają powierzchnie $z = \cos x$, $z = 0$, $y = 1$, $y = -1$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

5. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad z = 2 + x^2 + y^2.$$
Sporządzić rysunek tej bryły.

Zestawy zadań z egzaminów#

Egzamin podstawowy

Zestaw I

Grupa A

1. Promień podstawy stożka ma długość $R = 3$ m, a wysokość $H = 4$ m. Promień podstawy zwiększono o 2 cm, natomiast wysokość zmniejszono o 3 cm. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się pole powierzchni bocznej tego stożka.

2. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_0^\infty \frac{x}{e^x} \, dx$.

3. Wyznaczyć położenie środka masy cienkiej jednorodnej płytki w kształcie półkola o promieniu R. Zastosować współrzędne biegunowe.

4. Korzystając z odpowiednich twierdzeń o szeregach potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$.

5. Spośród prostopadłościanów o ustalonej długości przekątnej $p = \sqrt{3}$ wybrać ten, który ma największą objętość.

6. Obliczyć pole części powierzchni $z = x^2 + y^2$ zawartej między płaszczyznami $z = 1$ i $z = 9$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne biegunowe.

7. Jednorodna półkula o promieniu R ma masę M. Obliczyć moment bezwładności tej półkuli względem jej osi symetrii. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne sferyczne.

8. Funkcja $f(x, y)$ ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe na $\mathbb{R}^2$, a funkcje $p(t)$, $r(t)$ mają drugie pochodne na odcinku (α, β). Niech $z(t) = f(p(t), r(t))$ dla $t \in (\alpha, \beta)$. Obliczyć $z'(t)$, $z''(t)$.

Od roku akademickiego 2000/2001 na obu egzaminach studenci otrzymują do rozwiązania w czasie 120 min. po 6 zadań.

Grupa B

1. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\sqrt[3]{(6.01)^3-(2.98)^3-(4.03)^3}$.
2. Określić położenie środka masy jednorodnego obszaru ograniczonego powierzchniami $z=0$, $z=4$, $x^2+y^2=9$, $x=0$, $(x\geqslant 0)$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne walcowe.
3. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_0^\infty \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$.
4. Podać definicję pochodnej kierunkowej funkcji f w punkcie (x_0,y_0) w kierunku wersora $\vec{v}=(v_x,v_y)$. Korzystając z tej definicji obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ w punkcie $(x_0,y_0)=\left(\sqrt[3]{7},1\right)$ w kierunku wersora $\vec{v}=\left(\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$.
5. Cienka jednorodna płytka o masie M ma kształt trójkąta prostokątnego równoramiennego o przeciwprostokątnej a. Obliczyć moment bezwładności tej płytki względem przeciwprostokątnej.
6. Napisać równanie stycznej do krzywej $xe^y+ye^x=e^{xy}$ w punkcie jej przecięcia z osią Oy.
7. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=\left(y^2-2x\right)e^{-x}$.
8. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n}$. Odpowiedź uzasadnić.

Grupa C

1. Średnica walca zmierzona z dokładnością 1 cm wynosi $D=1$ m, a wysokość zmierzona z dokładnością 2 cm wynosi $H=2$ m. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość tego walca?
2. Obliczyć objętość obszaru U ograniczonego powierzchniami
$$z=3,\ z=\sqrt{25-x^2-y^2}.$$
Sporządzić rysunek tego obszaru. Zastosować współrzędne biegunowe.
3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^2}(x+2)^n.$$
4. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $\left(1,\sqrt{3},z_0\right)$ do wykresu funkcji
$$z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

5. Jednorodna cienka płytka o masie M ma kształt kwadratu o boku a. Obliczyć moment bezwładności tej płytki względem jej przekątnej.
6. W całce iterowanej
$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3+1}^{2} f(x,y)\,dy$$
zmienić kolejność całkowania. Sporządzić rysunek obszaru całkownia.
7. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=xy\ln\left(x^2+y^2\right)$ położone we wnętrzu pierwszej ćwiartki układu współrzędnych.
8. Znaleźć położenie środka masy części jednorodnej kuli $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ leżącej w pierwszym oktancie układu współrzędnych $(x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne sferyczne.

Grupa D

1. Zmienić kolejność całkowania w całce
$$\int\limits_{-1}^{1} dx\int\limits_{x-1}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$$
Naszkicować obszar całkowania.
2. Obliczyć masę półkuli wydrążonej o promieniu wewnętrznym r i promieniu zewnętrznym R, jeżeli gęstość masy w punkcie jest równa odległości tego punktu od środka kuli. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne sferyczne.
3. Sformułować kryterium całkowe zbieżności szeregów. Korzystając z tego kryterium zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^2+2}$.
4. Liczbę 12 przedstawić w postaci sumy trzech dodatnich składników x, y, z tak, aby iloczyn xyz był największy. Jaka będzie odpowiedź, gdy składniki mogą mieć dowolny znak?
5. Korzystając z odpowiednich twierdzeń o szeregach potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{4^n}$.
6. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednorodnego $(\gamma_0=1)$ obszaru ograniczonego powierzchniami $z=x^2+y^2$, $z=4$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne biegunowe.
7. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem
$$x^3+y^3-27xy=0.$$

8. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\frac{(1.02)^4}{\sqrt[3]{7.99}}.$$

Zestaw II

Grupa A

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$.
2. Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{2n^2+1}.$$
Sformułować wykorzystywane kryteria.
3. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\sqrt{(5.02)^2-(2.97)^2}.$$
4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=x^2+y^2+\frac{2}{xy}$.
5. Napisać równanie stycznej w punkcie $(1,2)$ do wykresu funkcji $y=y(x)$ określonej równaniem $x^2y^3-y^2-4=0$.
6. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{2-x^2} f(x,y)\,dy.$$
Narysować obszar całkowania.
7. Obliczyć pole tej części sfery $x^2+y^2+z^2=9$, która spełnia warunek $z \geqslant \sqrt{5}$.
8. Obliczyć współrzędne środka masy jednorodnego obszaru ograniczonego powierzchniami $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=6$, gdzie $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Zastosować współrzędne walcowe. Sporządzić rysunek.

Grupa B

1. Obliczyć pole obszaru D zawartego między wykresem funkcji $y=xe^{-x}$ i dodatnią półosią osi Ox.
2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}(x-3)^n.$$

3. Dany jest prostokąt o bokach $a=12$ m i $b=5$ m. O ile w przybliżeniu zmieni się długość jego przekątnej, jeśli boki tego prostokąta zwiększymy odpowiednio o 2 cm i 3 cm?
4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=xy^2(2-x-y)$ we wnętrzu pierwszej ćwiartki układu współrzędnych.
5. Wyznaczyć wersor $\vec{v}=(v_x,v_y)$, w kierunku którego pochodna $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2)$ funkcji $f(x,y)=\arcsin\frac{x}{y}$ ma wartość 0.
6. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int\limits_0^4 \int\limits_{\sqrt{x}}^{6-\frac{1}{2}x} f(x,y)\,dy.$$
Narysować obszar całkowania.
7. Obliczyć położenie środka masy jednorodnej ćwiartki koła o promieniu R.
8. Obliczyć całkę potrójną
$$\iiint\limits_U \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}},$$
gdzie U jest obszarem ograniczonym sferami $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=9$. Zastosować współrzędne sferyczne.

Grupa C

1. Sformułować kryterium porównawcze zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju. Korzystając z tego kryterium zbadać zbieżność całki
$$\int\limits_0^2 \frac{1+\sin x}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$$
2. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu szeregu potęgowego obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n}{3^n}.$$
3. Średnicę walca $D=4$ m i jego wysokość $H=3$ m zmierzono z dokładnością do 1 cm. Oszacować błąd, jaki popełnimy obliczając jego objętość.
4. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y=y(x)$ zadanej wzorem
$$x^2-2xy-3y^2+4=0.$$
5. Znaleźć płaszczyznę styczną w punkcie $(3,2,z_0)$ do wykresu funkcji
$$z=\ln\left(x^2-y^3\right).$$

6. Za pomocą całki podwójnej obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi $xy = 2$ i $x + 2y - 5 = 0$.

7. Obliczyć objętość obszaru U ograniczonego powierzchniami
$$z = x^2 + y^2, \quad z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$
Sporządzić rysunek.

8. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednorodnej ($\gamma_0 = 1$) bryły U ograniczonej stożkiem $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$. Zastosować współrzędne sferyczne. Sporządzić rysunek.

Grupa D

1. Sformułować kryterium ilorazowe zbieżności całek niewłaściwych pierwszego rodzaju. Korzystając z tego kryterium zbadać zbieżność całki
$$\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2 + \cos x}.$$

2. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję
$$f(x) = \frac{2x - 1}{(x + 1)(x - 2)}.$$
Określić promień zbieżności tego szeregu.

3. O ile w przybliżeniu wzrośnie objętość prostopadłościanu, którego krawędzie mają długości 2 m, 3 m i 4 m, jeżeli wydłużymy je odpowiednio o 1 cm, 2 cm i 3 cm?

4. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji
$$f(x, y) = x^2 - 4y^2$$
na kole $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

5. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji
$$f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$
w punkcie $(-3, 4)$ w kierunku wersora $\vec{v}$ tworzącego kąt $\frac{2}{3}\pi$ z dodatnią półosią Ox.

6. Za pomocą całki podwójnej obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi $y = x^2 + x - 1$ i $x - y + 3 = 0$.

7. Obliczyć pole części powierzchni $z = xy$ wyciętej przez walec $x^2 + y^2 = 4$.

8. Znaleźć współrzędne środka masy jednorodnego stożka
$$0 \leqslant z \leqslant 2 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$
Zastosować współrzędne walcowe. Sporządzić rysunek.

Zestaw III

Grupa A

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{9 + 4x^2}$.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n3^n}$.

3. Krawędzie prostopadłościanu zmierzone z dokładnością 0.1 cm wynoszą odpowiednio $x = 10.0$ cm, $y = 15.0$ cm i $z = 20.0$ cm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością, można obliczyć objętość tego prostopadłościanu?

4. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x, y) = 2xy$ na obszarze $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

5. Zbadać ciągłość funkcji
$$f(x, y) = \begin{cases} \ln(1 + xy) & \text{dla} \quad y \neq 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ x & \text{dla} \quad y = 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6. Sprawdzić, że funkcja uwikłana $y = y(x)$ określona wzorem $x^2 + y^2 + 4xy = 0$ spełnia warunek $y''(x) \equiv 0$. Wyjaśnić powyższy fakt.

7. Wyznaczyć położenie środka masy jednorodnej połowy koła określonej nierównościami $x^2 + y^2 \leqslant 2y$, $x \geqslant 0$.

8. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednorodnej ($\gamma_0 = 1$) bryły U ograniczonej powierzchniami $z^2 = 4x$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$.

Grupa B

1. Czy pole obszaru D zawartego między krzywą $y = e^{-x^2}$ i osią Ox jest skończone? Odpowiedź uzasadnić. Sporządzić rysunek.

2. Funkcję $f(x) = \dfrac{1}{10 + x}$ rozwinąć w szereg Taylora w punkcie $x_0 = -1$. Określić przedział jego zbieżności.

3. Zbadać czy istnieje granica $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\frac{1}{x^2 + y^2}$.

4. Na powierzchni określonej równaniem $xyz = 1$ wyznaczyć punkt, który leży najbliżej początku układu współrzędnych.

5. Promień podstawy walca i jego wysokość, zmierzone z dokładnością 0.1 cm, wynoszą odpowiednio $R = 1.6$ cm i $H = 3.2$ cm. Oszacować błąd względny przy obliczeniu objętość V tego walca.

6. Wyznaczyć równanie stycznej w punkcie $x_0 = 1$ do wykresu funkcji uwikłanej $y = y(x)$ zadanej równaniem
$$x^2 \ln y + y^2 \ln x + 1 = 0.$$
7. Obliczyć pole tej części Σ stożka $y^2 + z^2 = x^2$, która leży wewnątrz walca $x^2 + y^2 = 1$.
8. Wyznaczyć środek masy jednorodnej bryły U ograniczonej płaszczyznami układu współrzędnych i płaszczyzną $x + y + z = 3$.

Grupa C

1. Obliczyć pole obszaru D zawartego pomiędzy krzywą $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$, gdzie $x \geqslant 1$ i jej asymptotą.
2. Obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x+2)^n$. Podać dziedzinę tej sumy.
3. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\left(\sqrt{15} - \sqrt{99}\right)^2.$$
4. W kulę o promieniu $R = 6$ cm wpisano prostopadłościan o największej objętości. Wyznaczyć długości krawędzi x, y, z tego prostopadłościanu.
5. Zbadać ciągłość funkcji $f(x,y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{y} & \text{dla} \quad y \neq 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{dla} \quad y = 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$
6. Sprawdzić, że dla funkcji $z(x,y) = y + F\left(x^2 - y^2\right)$, gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej, zachodzi równość
$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x.$$
7. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego trójkąta równobocznego o boku a i masie M, względem jego boku.
8. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $y^2 + z^2 - x = 1$, $x = 0$.

Grupa D

1. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchnią powstałą z obrotu krzywej $y = xe^{-x}$, $x \geqslant 0$, wokół jej asymptoty.
2. Funkcję $f(x) = \operatorname{arctg} x$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Określić promień zbieżności tego szeregu.
3. Zbadać, czy istnieje granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

4. Suma trzech liczb dodatnich x, y, z wynosi 120. Jaki jest największy możliwy ich iloczyn?
5. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego zmierzone z dokładnością 0.1 cm mają długość $a = 7.5$ cm i $b = 18.0$ cm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć długość przeciwprostokątnej c tego trójkąta?
6. Przekształcić wyrażenie $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ wprowadzając nowe zmienne $u = 2x + y$, $v = 2x - y$.
7. Obliczyć moment bezwładności względem osi Ox jednorodnego ($\sigma_0 = 1$) obszaru D ograniczonego prostymi $y = \dfrac{x}{2}$, $x = 3$, $y = 3$.
8. Obliczyć, jaka część objętości kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2z$ jest wycięta przez stożek $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Zestaw IV

Grupa A

1. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu szeregu potęgowego obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^n}.$$
2. Funkcję $f(x) = x^2 \sin 2x$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Korzystając z tego rozwinięcia obliczyć $f^{(5)}(0)$.
3. Napisać równanie stycznej w punkcie $(0,1)$ do wykresu funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem
$$2y - \sqrt{y}e^{\frac{x}{y}} = 1.$$
4. Znaleźć współrzędne punktu C leżącego na płaszczyźnie $z = 2$, który z punktami $A = (1,0,0)$ i $B = (0,-2,0)$ tworzy trójkąt o najmniejszym obwodzie.
5. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-1-\sqrt{1-x^2}}^{-x^2} f(x,y)\, dy.$$
6. Obliczyć masę obszaru D ograniczonego krzywymi
$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x$$
o gęstości powierzchniowej masy $\sigma(x,y) = x$.

7. Obliczyć całkę potrójną
$$\iiint\limits_U y\cos\pi x\,dxdydz,$$
jeżeli obszar U ograniczony jest powierzchniami $z=1-y^2$, $x=0$, $x=1$. Narysować obszar całkowania.

8. Obliczyć moment statyczny względem płaszczyzny xOz jednorodnego $(\gamma_0=1)$ obszaru określonego nierównościami
$$1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 3,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0.$$
Zastosować współrzędne sferyczne.

Grupa B

1. Wyznaczyć promień i przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{\sqrt{n}2^n}.$$

2. Znaleźć wersor wskazujący kierunek, w którym pochodna kierunkowa funkcji
$$f(x,y)=\sin xy^2+\frac{2y}{\sqrt{x}}$$
w punkcie $(1,0)$ przyjmuje wartość 0.

3. Wyznaczyć punkt w $\mathbb{R}^3$ o nieujemnych współrzędnych, których suma równa się 1, a ich iloczyn jest największy.

4. Znaleźć ekstrema funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem
$$x^2e^y-y^4+1=0.$$

5. Obliczyć pole powierzchni płata Σ wyciętego z wykresu funkcji $z=1+x^2+y^2$ przez walec o równaniu $x^2+y^2=3$. Sporządzić rysunek.

6. Obliczyć moment statyczny względem osi Ox jednorodnego obszaru D o masie M ograniczonego krzywymi $y=0$, $y=\sqrt{4-(x-2)^2}$. Sporządzić rysunek.

7. Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, gdzie obszar D ograniczony jest krzywymi $y-x-2=0$, $y-x^2+2x-2=0$, zamienić na całki iterowane. Naszkicować obszar całkowania.

8. Wyznaczyć współrzędne środka masy bryły U o gęstości masy określonej wzorem
$$\gamma(x,y,x)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2},$$
która ograniczona jest powierzchniami
$$z=0,\quad z=-\sqrt{4-x^2-y^2},\quad z=-\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Zastosować współrzędne sferyczne. Sporządzić rysunek.

Grupa C

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$. Sformułować wykorzystywane kryteria.

2. Na powierzchni określonej równaniem $z=\frac{1}{xy}$ znaleźć punkt, który leży najbliżej początku układu współrzędnych.

3. Uzasadnić, że równanie $x^2y+\cos y=1$ określa na otoczeniu punktu $(1,0)$ funkcję uwikłaną $y=y(x)$. Obliczyć $y'(1)$ oraz $y''(1)$.

4. Wyznaczyć dziedzinę, zbiór wartości oraz narysować poziomice funkcji
$$f(x,y)=\ln\left(4-x^2-y^2\right).$$

5. Funkcja $f(u,v)$ ma na $\mathbb{R}^2$ ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}$ funkcji
$$h(x,y)=xf\left(xy^2,x+y\right).$$

6. Obliczyć pole powierzchni płata Σ wyciętego z powierzchni $z=1-x^2-y^2$ przez płaszczyzny $z=-1$, $z=-3$. Zastosować współrzędne biegunowe. Sporządzić rysunek.

7. Obliczyć całkę podwójną $\iint\limits_D xy\,dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $x=y^2$, $x=1+\sqrt{1-y^2}$.

8. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednorodnej $(\gamma_0=1)$ bryły ograniczonej powierzchniami
$$z=\sqrt{4-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{x^2+y^2}.$$
Zastosować współrzędne sferyczne.

Grupa D

1. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchnią powstałą z obrotu wykresu funkcji $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{4-x}}$, gdzie $3\leqslant x\leqslant 4$, dookoła osi Ox.

2. Funkcję $f(x)=\frac{x}{2+x}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Wyznaczyć przedział zbieżności otrzymanego szeregu.

3. Obliczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=\left(x^2+y\right)\sqrt{e^y}$.

4. Na przykładzie funkcji
$$f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2+1\right)$$
sprawdzić, że wektor **grad** $f(x_0,y_0)$ jest prostopadły do jej poziomicy przechodzącej przez punkt (x_0,y_0).

5. Z definicji zbadać istnienie pochodnej kierunkowej funkcji
$$f(x,y)=\sqrt{(y-1)^2x}$$
w punkcie $(1,1)$ w kierunku wersora nachylonego do osi Ox pod kątem $\frac{\pi}{3}$.

6. Obliczyć całkę podwójną $\iint\limits_D x\,dxdy$, gdzie obszar D ograniczony jest krzywymi $y=-x$, $y=\sqrt{3}x$, $x^2+y^2=4y$. Naszkicować obszar całkowania.

7. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $y=x^2$, $z=0$, $x+y+z=2$. Sporządzić rysunek.

8. Obliczyć moment statyczny względem płaszczyzny xOy jednorodnej $(\gamma_0=1)$ bryły ograniczonej stożkiem $z=\sqrt{x^2+y^2}$, płaszczyzną $y=0$ oraz półsferą $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. Zastosować współrzędne sferyczne. Sporządzić rysunek.

Zestaw V

Grupa A

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\arcsin x}}$. Sformułować wykorzystywane kryteria

2. Wyznaczyć promień i przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n\sqrt{n}}.$$

3. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(1,1,z_0)$ do wykresu funkcji
$$z=x\sqrt{y}-e^x\ln y.$$

4. Wyznaczyć wersor $\vec{v}=(v_x,v_y)$ wskazujący kierunek, w którym pochodna kierunkowa $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(3,4)$ funkcji
$$f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$
ma wartość 0.

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y$.

6. Naszkicować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1-\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy.$$

7. Obliczyć pole płata Σ wyciętego ze sfery $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ przez powierzchnię walcową $x^2+y^2-2y=0$. Zastosować współrzędne biegunowe.

8. Obliczyć masę bryły U ograniczonej płaszczyznami $y+z=1$, $y+z=2$, $z=0$, $z=1$, $x=0$ i $x=3$, o gęstości objętościowej masy $\gamma(x,y,z)=xy$. Sporządzić rysunek.

Grupa B

1. Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną całki niewłaściwej $\int\limits_0^{\infty}\frac{x\sin 2x}{e^{3x}}\,dx$.

2. Funkcję $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Określić przedział zbieżności otrzymanego szeregu.

3. Promień podstawy stożka zmierzony z dokładnością 1 cm wynosi $R=3$ m, a jego wysokość zmierzona z dokładnością 2 cm wynosi $H=4$ m. Z jaką, w przybliżeniu, dokładnością można obliczyć pole powierzchni bocznej P tego stożka?

4. Niech f będzie dowolną funkcją jednej zmiennej różniczkowalną na $\mathbb{R}$. Pokazać, że funkcja $z(x,y)=y+f\left(x^2-y^2\right)$ spełnia równanie
$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x.$$

5. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem
$$x^2-2xy+2y^2+2x+1=0.$$

6. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy,$$
jeżeli obszar całkowania D ograniczony jest prostymi $y=x$, $y=x+2$, $y=2$ i $y=3$. Sporządzić rysunek.

7. Obliczyć masę płytki D ograniczonej krzywymi
$$x^2+y^2=2x,\quad y=x,\quad y=0,$$
jeżeli gęstość powierzchniowa masy $\sigma(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne biegunowe.

8. Korzystając z całki potrójnej obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $z = x^2 + y^2$, $z = 2\left(x^2 + y^2\right)$, $y = x$ i $y = x^2$. Sporządzić rysunek.

Grupa C

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{x^2}\,dx$. Sformułować wykorzystywane twierdzenia.

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \ln^2 n}.$$

3. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$(1.02)^{1.99}\sqrt[3]{7.97}.$$

4. Napisać równanie stycznej w punkcie $(1, y_0)$ do wykresu funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem
$$x^2 \ln y - y^2 \ln x + 1 = 0.$$

5. Znaleźć długości a, b, c krawędzi prostopadłościanu o objętości $V = 27$, który ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej.

6. Korzystając z całki podwójnej obliczyć pole figury D ograniczonej krzywymi
$$y^2 = 2x + 1 \quad \text{i} \quad y^2 = -6x + 9.$$
Sporządzić rysunek.

7. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$
gdzie D jest obszarem określonym nierównościami $y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant x$ i $y \geqslant 0$. Sporządzić rysunek.

8. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego walca o masie M, promieniu podstawy R i wysokości H, względem średnicy podstawy. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne walcowe.

Grupa D

1. Obliczyć pole obszaru D, który jest ograniczony wykresem funkcji
$$y = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$$
oraz prostymi $x = 1$, $y = 0$ i leży w półpłaszczyźnie $x \geqslant 1$.

2. Korzystając z odpowiednich twierdzeń o szeregach potęgowych obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$.

3. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \dfrac{\arcsin y}{\arccos x}$ w punkcie $(x_0, y_0) = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

4. Niech $g(x,y) = f\left(xy, x^2 + y^2\right)$, gdzie funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe na $\mathbb{R}^2$. Obliczyć $y\dfrac{\partial g}{\partial x} - x\dfrac{\partial g}{\partial y}$.

5. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + 12x$ na obszarze określonym nierównością $x^2 + y^2 \leqslant 16$.

6. Korzystając z całki podwójnej obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $z = 1 - x^2$, $z = 0$ i $y^2 = x$. Sporządzić rysunek.

7. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oy obszaru D określonego przez nierówności $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $x \geqslant 0$ o gęstości powierzchniowej masy $\sigma(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Zastosować współrzędne biegunowe.

8. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć całkę potrójną
$$\iiint_U \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$$
po obszarze U określonym przez nierówność $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant z$. Sporządzić rysunek.

Zestaw VI

Grupa A

1. Wykorzystując kryterium ilorazowe zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^5}}\,dx.$$

2. Wykorzystując kryterium porównawcze zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi^{-n}}{e^{-n}}.$$

3. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = e^{2x^2 - xy + y^2}$.

4. Obliczyć moment statyczny, względem osi Ox, jednorodnego $(\sigma_0 = 1)$ obszaru D ograniczonego krzywymi
$$x^2 - 2x + y^2 = 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \ (x \geqslant 0, y \geqslant 0).$$

5. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+xy^2}$ w punkcie $(2,4)$, w kierunku wersora tworzącego z dodatnią częścią osi Ox kąt $\frac{\pi}{6}$.

6. Wykazać, że nie istnieje granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+2y}{x^2+y^2}$.

7. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$z=0,\ x^2-2x+y^2=0,\ z=\sqrt{x^2+y^2}.$$

8. Obliczyć moment bezwładności, względem osi Oz, jednorodnej ($\gamma_0=1$) bryły U ograniczonej powierzchniami $z=x^2+y^2+1$, $z=5$.

Grupa B

1. Wykorzystując kryterium ilorazowe zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x^3}}{1+x^3}\,dx.$$

2. Wykorzystując kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{3^n n!}$.

3. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=\ln\left(x^2+e^{y^2}\right)$.

4. Obliczyć masę obszaru D ograniczonego krzywymi
$$x^2+y^2-2y,\ \ y=\sqrt{3}x,\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0),$$
jeżeli jego powierzchniowa gęstość masy wyraża się wzorem $\sigma(x,y)=x$.

5. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $\left(1,\sqrt{3},z_0\right)$ do wykresu funkcji
$$z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

6. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\frac{\operatorname{arctg}1{,}1}{\sqrt{3.98}}.$$

7. Obliczyć pole płata Σ będącego częścią wykresu funkcji $z=\sqrt{x^2+y^2}$ leżącą wewnątrz walca $x^2+y^2-2y=0$.

8. Obliczyć moment statyczny, względem płaszczyzny xOy, jednorodnej ($\gamma_0=1$) bryły U ograniczonej powierzchniami $z=-x^2-y^2+9$, $z=5$.

Grupa C

1. Wykorzystując kryterium porównawcze zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int\limits_0^\infty \frac{x+\ln x}{\sqrt{x^3+e^{-x}}}\,dx.$$

2. Wykorzystując kryterium całkowe zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n^2}$.

3. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=e^{-2x}\left(x-y^2\right)$.

4. Obliczyć moment bezwładności, względem punktu $(0,0)$, obszaru D ograniczonego krzywymi
$$x^2+y^2=2,\ \ y=1,\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 1),$$
jeżeli jego gęstość powierzchniowa masy wyraża się wzorem
$$\sigma(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{5}{2}}.$$

5. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{3n+\frac{1}{n}}}.$$

6. Napisać równanie stycznej w punkcie $(1,y_0)$ do wykresu funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej warunkiem $y^2\ln x+ye^{-x}-1=0$.

7. Obliczyć pole płata Σ będącego częścią wykresu funkcji $z=\sqrt{x^2+y^2}$ leżącą między płaszczyznami $z=2$, $z=3$.

8. Obliczyć masę bryły U ograniczonej powierzchniami
$$x^2+y^2+z^2=8,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ (z\geqslant 0),$$
jeżeli jej objętościowa gęstość masy wyraża się wzorem $\gamma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Grupa D

1. Wykorzystując kryterium ilorazowe zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^3+\sin^2 x}.$$

2. Wykorzystując kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{2}}.$$

3. We wnętrzu pierwszej ćwiartki układu współrzędnych znaleźć ekstrema lokalne funkcji
$$f(x,y)=xy(x+y+1).$$

4. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$ na obszarze ograniczonym krzywymi
$$x^2+y^2=2,\ \ x=1,\ \ y=0\ \ (x\geqslant 1,\ y\geqslant 0).$$

5. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się objętość stożka o wysokości $H = 100$ cm i promieniu podstawy $R = 50$ cm, jeżeli jego wysokość zwiększymy o 2 cm, a promień podstawy zmniejszymy o 1 cm.

6. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem
$$x^2 - 2xy + y = 0.$$

7. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $z = 10 - x^2 - y^2$, $z = 1$.

8. Obliczyć moment bezwładności, względem początku układu współrzędnych, bryły U ograniczonej powierzchniami
$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad (z \geqslant 0),$$
jeżeli jej objętościowa gęstość masy wyraża się wzorem
$$\gamma(x, y, z) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Zestaw VII

Grupa A

1. Charakter zmian natężenia prądu elektrycznego pewnego impulsu wywołanego w obwodzie jest określony zależnością $i(t) = 5te^{-t}$. Wyznaczyć całkowity ładunek elektryczny
$$q = \int_0^\infty i(t)\, dt,$$
jaki przepłynie w obwodzie wskutek wywołania jednego impulsu.

2. Stosując kryterium porównawcze lub ilorazowe zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+1}}}.$$

3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$.

4. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n10^{n-1}}.$$

5. Korzystając z definicji obliczyć pochodną kierunkową funkcji
$$f(x, y) = x^2 + xy + 3y - 1$$
w punkcie $(x_0, y_0) = (1, 1)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

6. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = x, \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 0.$$

7. Obliczyć moment bezwładności jednorodnej $(\sigma_0 = 1)$ figury D określonej nierównościami $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $y \geqslant 0$ względem osi Oz.

8. Określić położenie środka masy kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2z$, jeżeli jej objętościowa gęstość masy w punkcie jest równa odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

Grupa B

1. Obliczyć pole obszaru D, który jest ograniczony przez proste $y = 0$, $x = 0$, $x = 9$ oraz krzywą $y = (x-1)^{-\frac{2}{3}}$.

2. Wykazać, że funkcja $z = \ln(e^x + e^y)$ spełnia równanie
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

3. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji
$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2$$
na trójkącie domkniętym o wierzchołkach $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$.

4. Obliczyć pochodne $y'(x)$, $y''(x)$ funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej wzorem
$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

5. Znaleźć zbiór $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2 - 3x + 1\right)^n$$
jest zbieżny. Wyznaczyć sumę $S(x)$ tego szeregu.

6. Znaleźć momenty statyczne względem obu osi układu współrzędnych jednorodnego $(\sigma_0 = 1)$ obszaru płaskiego ograniczonego sinusoidą $y = \sin x$, gdzie $0 \leqslant x \leqslant \pi$, i osią Ox.

7. Obliczyć masę koła o promieniu R i powierzchniowej gęstości masy równej w każdym punkcie odległości tego punktu od brzegu koła.

8. Obliczyć całkę potrójną
$$\iiint_U \left(x^2 + y^2\right) dxdydz,$$
jeżeli U jest obszarem ograniczonym powierzchnią $x^2 + y^2 - 2z = 0$ oraz płaszczyzną $z = 2$. Narysować obszar U.

Grupa C

1. Korzystając z kryterium porównawczego lub ilorazowego zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int_1^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}.$$
2. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji określonej wzorem
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
i zbadać ich ciągłość w punkcie $(x_0,y_0)=(0,0)$.
3. Znaleźć ekstrema funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem
$$x^2-2xy+2y^2+2x+1=0.$$
4. Stosując kryterium całkowe zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^\infty \dfrac{1}{n\ln^4 n}$.
5. Znaleźć punkt (x,y) taki, że $\mathbf{grad}\ \ln\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=\left(1,-\dfrac{16}{9}\right)$.
6. Obszar D jest ograniczony krzywymi o równaniach $x=3$, $x+y=3$, $y^2=4x$ dla $y\geqslant 0$. Obliczyć objętość bryły walcowej U, której podstawą jest obszar D, a jej tworzące są prostopadłe do płaszczyzny xOy, a bryła jest ścięta płaszczyzną o równaniu $x+y-z=0$.
7. Określić moment statyczny względem płaszczyzny xOy kuli
$$x^2+y^2+z^2\leqslant 4z,$$
jeżeli powierzchniowa gęstość masy w każdym punkcie jest równa kwadratowi odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.
8. Obliczyć współrzędne środka masy jednorodnej bryły ograniczonej powierzchniami $z=1-x^2-y^2$, $z=0$.

Grupa D

1. Zbadać, czy figura D ograniczona krzywą $y=\dfrac{8}{x^2+4}$ i osiami układu współrzędnych ma skończone pole.
2. Wykazać, że granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}$ nie istnieje.
3. Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2+n\sqrt{n}}-\sqrt{n^2-n\sqrt{n}}\right).$$
Skorzystać z kryterium porównawczego lub ilorazowego.

4. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji
$$f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$$
na obszarze D określonym nierównościami $x\leqslant 0$, $|x|+|y|\leqslant 1$.
5. Obliczyć pochodną cząstkową $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ funkcji $u(x,y)=x^2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-y^2\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.
6. Obliczyć całkę $\iiint\limits_U x^2|z|\,dxdydz$, gdzie U jest kulą $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.
7. Obliczyć całkę $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}\,dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi $x=2$, $y=x$ i hiperbolą $xy=1$.
8. Wyznaczyć środek masy jednorodnej połowy koła $x^2+y^2\leqslant 2x$, $y\leqslant 0$.

Zestaw VIII

Grupa A

1. Wykorzystując rozwinięcie Maclaurina funkcji $\sin x$ obliczyć $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}\,dx$.
2. W punkcie $(0,0)$ zbadać ciągłość funkcji f określonej wzorem
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad x^2+y^2>0,\\ 0 & \text{dla} \quad x^2+y^2=0.\end{cases}$$
3. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.
4. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y)=x^2-y^2$ na kole o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 2.
5. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x,y)=12-2x-3y$ na obszarze D ograniczonym prostymi $12-2x-3y=0$, $x=0$, $y=0$.
6. Obliczyć pole płata Σ będącego częścią powierzchni $z^2=4x$ odciętą walcem $x^2+y^2=4x$ i płaszczyzną $x=1$.
7. W całce iterowanej
$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz$$
zmienić kolejność całkowania. Narysować obszar całkowania.

8. Przechodząc do współrzędnych sferycznych obliczyć całkę
$$\iiint\limits_U \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$$
gdzie obszar całkowania U jest ograniczony sferą $x^2+y^2+z^2=z$.

Grupa B

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx$.

2. Znaleźć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$
Dla których $x\in\mathbb{R}$, funkcja określona tym szeregiem ma pochodną?

3. Funkcję $f(x)=\dfrac{x^{10}}{1-x}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Wyznaczyć przedział jego zbieżności.

4. Sprawdzić, że funkcja $z(u,v)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, gdzie $x=u+v$, $y=u-v$, spełnia warunek
$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}.$$

5. Pokazać, że $y'(x)=\pm\dfrac{2x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$, gdzie $y=y(x)$ jest jedną z funkcji uwikłanych określonych równaniem
$$x^2y^2+x^2+y^2-1=0.$$

6. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} f(x,y)\,dy.$$
Narysować obszar całkowania.

7. W całce iterowanej
$$\int_{\frac{R}{2}}^{2R}dy\int_{0}^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x,y)\,dx$$
dokonać zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe ($R>0$).

8. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ na obszarze U określonym nierównością $x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$.

Grupa C

1. Wyznaczyć zbiór tych liczb naturalnych k, dla których całka niewłaściwa
$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^k\ln x}$$
jest zbieżna.

2. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$.

3. Stosując twierdzenie o różniczkowaniu szeregu potęgowego obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n.$$

4. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\ln\left(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1\right).$$

5. Napisać wzór Taylora z resztą R_3 dla funkcji $f(x,y)=e^x\sin y$ na otoczeniu punktu $(1,1)$.

6. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x,y)=xy$ na obszarze D ograniczonym okręgiem o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $\sqrt{2}a$, $a>0$.

7. Obliczyć objętość obszaru U ograniczonego powierzchniami
$$z=x^2+y^2,\quad z=0,\quad y=1,\quad y=2x,\quad y=6-x.$$

8. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całkę iterowaną
$$\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^3 dz.$$
Narysować obszar całkowania.

Grupa D

1. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi $y=e^{-x}$, $y=0$ dla $x\geqslant 1$. Narysować obszar D.

2. Obliczyć pochodną $\dfrac{du}{dx}$, jeżeli $u=\arcsin\dfrac{x}{z}$ oraz $z=\sqrt{x^2+1}$.

3. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=1-x^2-y^2$ w punkcie $(x_0,y_0)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ w kierunku wersora $\vec{v}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Wykorzystując twierdzenie o całkowaniu szeregu potęgowego obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

5. Korzystając z metod rachunku różniczkowego znaleźć na elipsie $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ punkty położone najbliżej i najdalej prostej $3x+y-9=0$.

6. Obliczyć pochodną y'' funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem
$$x^2+2xy-y^2=4.$$

7. Sumę całek
$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy$$
przedstawić w postaci jednej całki iterowanej. Narysować obszar całkowania.

8. Stosując całkę podwójną obliczyć objętość obszaru U ograniczonego powierzchniami
$$z=x^2+y^2,\quad z=2x^2+2y^2,\quad y=x,\quad y=x^2.$$

Zestaw IX

Grupa A

1. Kawałek jednorodnej cienkiej blachy o masie M ma kształt półkola o promieniu R. Obliczyć moment bezwładności blachy względem jej osi symetrii. Sporządzić rysunek.

2. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się objętość walca o promieniu podstawy $R=1$ m i wysokości $H=2$ m, jeżeli wysokość zwiększymy o 4 cm, a promień podstawy zmniejszymy o 1 cm?

3. Znaleźć wymiary a, b, c prostopadłościanu o objętości $V=8\,\mathrm{m}^3$, który ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej.

4. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)4^{-n}.$$

5. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami
$$z=-\sqrt{4-x^2-y^2},\quad z=2-\sqrt{x^2+y^2}.$$
Wprowadzić współrzędne walcowe. Sporządzić rysunek.

6. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n}$.

7. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_{-1}^{1} dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{2-x^2} f(x,y)\,dy.$$
Narysować obszar całkowania.

8. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=x^y+y^x$ w punkcie $(x_0,y_0)=(3,2)$ w kierunku wersora $\vec{v}=\left(\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$.

Grupa B

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^n+5^n}$.

2. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\arcsin 0.53 \cdot \arccos 0.48.$$

3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}(x-1)^n.$$

4. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=\left(2x+y^2\right)e^x$.

5. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2+z^2=4.$$
Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne walcowe.

6. Obliczyć pole płata Σ będącego częścią powierzchni $z=x^2+y^2$ ograniczoną płaszczyznami $z=1$ i $z=9$. Sporządzić rysunek.

7. Obliczyć masę cienkiego kawałka blachy w kształcie pierścienia o promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R. Powierzchniowa gęstość masy w punkcie jest równa odległości tego punktu od środka pierścienia. Sporządzić rysunek.

8. Wyznaczyć położenie środka masy jednorodnego trójkąta równoramiennego o podstawie a i wysokości h. Sporządzić rysunek.

Grupa C

1. Jednorodny walec o średnicy D i wysokości H ma masę M. Obliczyć moment bezwładności walca względem jego osi symetrii. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne walcowe.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!+3}$.

3. Prędkość samolotu ustalona z dokładnością $5\,\frac{\text{km}}{\text{godz}}$ wynosi $v = 360\,\frac{\text{km}}{\text{godz}}$. Czas lotu (zmierzony z dokładnością 1 sek.) wynosi $t = 1.5$ godz. Wykorzystując różniczkę funkcji zbadać, z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć zasięg S lotu.

4. Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}.$$

5. Znaleźć krawędzie a, b, c prostopadłościanu o największej objętości, którego powierzchnia całkowita wynosi $P = 24\,\text{cm}^2$.

6. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^3+y^3}}$$
w punkcie $(x_0, y_0) = (1,2)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

7. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $x^2+y^2=4$, $z=10$, $z=x$. Sporządzić rysunek.

8. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_{-2}^{2} dx \int_{-x-2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy.$$
Narysować obszar całkowania.

Grupa D

1. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(0,-1,z_0)$ do wykresu funkcji
$$z = \frac{\operatorname{arctg} y}{x^2+1}$$

2. Średnicę kuli aluminiowej zmierzono z dokładnością 1 mm i otrzymano $D = 20.0$ cm. Gęstość aluminium wynosi $\gamma = 2.70 \pm 0.01\,\text{g/cm}^3$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć masę tej kuli?

3. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

4. Korzystając z całki podwójnej obliczyć objętość kuli U o promieniu R. Zastosować współrzędne biegunowe. Sporządzić rysunek.

5. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int_{0}^{2} dx \int_{1}^{1+\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy.$$
Narysować obszar całkowania.

6. Wyznaczyć promień i przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

7. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^3+y^3-9xy$.

8. Jednorodny stożek o masie M jest ograniczony powierzchniami $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = 4$. Obliczyć moment bewładności tego stożka względem osi Oz.

Zestaw X

Grupa A

1. Wykorzystując kryterium porównawcze zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int_0^1 \frac{e^x+\sin x}{\sqrt{x+\sin x}}\,dx.$$

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$.

3. Średnica podstawy zbiornika w kształcie walca, zmierzona z dokładnością do 1 cm wynosi $d = 3$ m, a jego wysokość zmierzona z dokładnością do 5 cm wynosi $h = 9$ m. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można wyznaczyć pole powierzchni całkowitej tego zbiornika?

4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^3+y^3-9xy$.

5. Obliczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y = y(x)$ danej równaniem
$$x^2+y^2-xy-2x=0.$$

6. Obliczyć moment bezwładności, względem osi Oy, trójkąta o wierzchołkach $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ i powierzchniowej gęstości masy $\sigma(x,y) = y$.

7. Obliczyć pole płata Σ będącego częścią wykresu funkcji $z = \sqrt{x^2+y^2}$ wyciętą walcem $x^2-2y+y^2=0$.

8. Obliczyć moment statyczny, względem płaszczyzny xOy, jednorodnej $(\gamma_0 = 1)$ bryły U ograniczonej powierzchniami $z = 9-x^2-y^2$, $z = 5$.

Grupa B

1. Wykorzystując kryterium porównawcze zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^4+\ln x}}\,dx.$$

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{n!}{n^n}$.

3. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość liczby
$$(2.01)^{3.98}.$$

4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y + 3$.

5. Znaleźć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2+1}$ w punkcie $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ w kierunku wersora tworzącego kąt $\frac{\pi}{4}$ z dodatnią częścią osi Ox.

6. Obliczyć masę obszaru płaskiego D o gęstości powierzchniowej $\sigma(x,y) = x$, ograniczonego krzywymi $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x = 0$, $(x \geqslant 0)$.

7. Wykorzystując całkę podwójną obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $z = 10 - x^2 - y^2$, $z = 1$.

8. Obliczyć moment bezwładności, względem początku układu współrzędnych, jednorodnej bryły U o masie M ograniczonej powierzchniami
$$x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ (z \geqslant 0).$$

Grupa C

1. Wykorzystując kryterium ilorazowe zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sin x}.$$

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} e^{-2n}$.

3. Ciało o masie 5 kg porusza się z prędkością 10 m/s. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć, w przybliżeniu, zmianę energii kinetycznej tego ciała wywołaną zmniejszeniem się jego masy o 0.02 kg i zwiększeniem prędkości o 0.01 m/s.

4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = e^{x^2+xy+y^2}$.

5. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $x = x(y)$ danej równaniem
$$x^2 - 3y^2 - 2xy + 4 = 0.$$

6. Obliczyć masę obszaru płaskiego D ograniczonego krzywymi $y^2 = x$, $x = 2y$ o gęstości powierzchniowej masy $\sigma(x,y) = xy$.

7. Obliczyć pole płata Σ będącego częścią wykresu funkcji $z = \sqrt{x^2+y^2} - 1$ zawartą między płaszczyznami $z = 2$, $z = 3$.

8. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z = \sqrt{x^2+y^2},\ (z \geqslant 0).$$

Grupa D

1. Wykorzystując kryterium ilorazowe zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^3 + \cos x}.$$

2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}(x+3)^n.$$

3. Szerokość płyty prostokątnego lotniska, zmierzona z dokładnością do 1 m, wynosi 800 m. Natomiast długość zmierzona z dokładnością do 2 m wynosi 3000 m. Z jaką, w przybliżeniu, dokładnością można wyznaczyć pole tego lotniska?

4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = e^{-x}\left(y^2 - 2x\right)$.

5. Napisać równanie stycznej do krzywej danej równaniem $xe^y + ye^x = e^{xy}$ w punkcie jej przecięcia z osią Ox.

6. Obliczyć moment statyczny, względem osi Ox, jednorodnej $(\sigma_0 = 1)$ figury płaskiej D ograniczonej krzywymi $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $y = 0$, $(y \geqslant 0)$.

7. Wykorzystując całkę podwójną obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $z = \sqrt{x^2+y^2} + 1$, $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $z = 0$.

8. Obliczyć moment bezwładności, względem osi Oz, jednorodnej bryły U o masie M ograniczonej powierzchniami $z = x^2 + y^2 + 1$, $z = 5$.

Egzamin na ocenę celującą

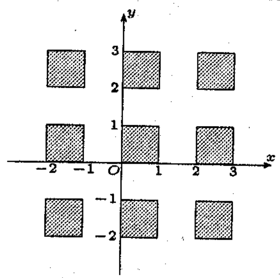
Zestaw I

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

2. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,\infty)$ jest ciągła. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f^n(x,y)\,dxdy}.$$

3. Podać przykład funkcji dwóch zmiennych, której dziedziną naturalną j zbiór złożony z nieskończenie wielu kwadratów domkniętych (rysunek).



4. Do sześciennego pudełka o krawędzi 1 włożono kulę o średnicy 1. Wyznacz najdłuższy odcinek, który można dołożyć do tego pudełka tak, aby moż było je zamknąć.

Zestaw II

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{n}$.

2. Funkcja f jest ciągła na $\mathbb{R}^2$. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant n^{-2}} f(x,y)\,dxdy.$$

3. Obliczyć promień największego okręgu, który można umieścić na elipsoidzi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

gdzie $0 < a < b < c$.

4. Narysować zbiór $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^y = y^x,\ x>0, y>0\}$. Na rysunku poda współrzędne charakterystycznych punktów.

Zestaw III

1. Podstawą ostrosłupa o wysokości h jest trójkąt o bokach a, b, c. Jakie powinno być położenie spodka wysokości ostrosłupa, aby pole jego powierzchni bocznej było najmniejsze?

2. Obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n+1)^2}{n!}$.

3. Naczynie w kształcie walca o średnicy $D = 2$ stoi na płaszczyźnie nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Ile wody można wlać do naczynia, aby nie przewróciło się? W rozważaniach nie uwzględniać masy naczynia ani grubości jego ścianek.

4. Niech $f(x,y) = x^8 + y^8 + 4xy + 1$. Udowodnić, że istnieją punkty (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_8,y_8) tworzące wierzchołki ośmiokąta foremnego, dla których spełniony jest warunek

$$f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) + \ldots + f(x_8,y_8) = 0.$$

estaw IV

1. Obliczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n^2-1)\,2^n}$.

2. Udowodnić, że całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^p)(1+x^2)}$$

nie zależy od parametru $p > 0$.

3. Funkcja f jest ciągła na $\mathbb{R}^3$ oraz spełnia warunek

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(x,y,z)\,dxdydz = 0.$$

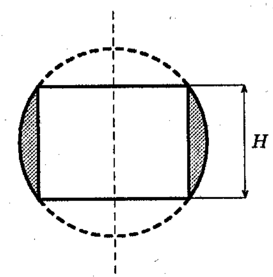
Udowodnić, że istnieje czworościan foremny U, dla którego spełniony jest warunek

$$\iiint\limits_{U} f(x,y,z)\,dxdydz = 0.$$

4. Zbadać, względem której prostej przechodzącej przez środek jednorodnego sześcianu, jego moment bezwładności jest najmniejszy.

Zestaw V

1. Powierzchnia zewnętrzna obrączki ma kształt sferyczny, a powierzchnia wewnętrzna walcowy.



Udowodnić, że objętość obrączki zależy jedynie od jej wysokości.

2. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}}$.

3. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech x_n oznacza n–ty dodatni pierwiastek równania $x = \operatorname{ctg} x$. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1} - k\pi).$$

4. Dana jest elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

gdzie $a > b > c > 0$ oraz punkt (x_0, y_0, z_0) położony na zewnątrz niej. Przez punkt ten poprowadzono wszystkie możliwe proste styczne do elipsoidy. Udowodnić, że punkty styczności tworzą krzywą płaską.

Zestaw VI

1. Znaleźć trójkąt o największym polu wpisany w elipsę o półosiach a i b. Ile rozwiązań ma to zadanie?

2. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2\sqrt[n]{5} \right).$$

3. Obliczyć objętość tej części sześcianu

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 2 \right\},$$

która leży na zewnątrz kuli

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9 \right\}.$$

Sporządzić rysunek.

4. Zbadać, czy istnieje granica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^4}{x + y}.$$

Odpowiedź uzasadnić.

Zestaw VII

1. Znaleźć funkcję elementarną, której szereg potęgowy ma postać

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

2. Niech (a_n) oznacza ciąg kolejnych liczb naturalnych, których rozwinięcia dziesiętne zawierają tylko nieparzyste cyfry, tj. 1, 3, 5, 7, 9. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

3. Obliczyć całki niewłaściwe

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx.$$

4. Funkcja f jest ciągła na $\mathbb{R}^2$. Ponadto dla dowolnych liczb dodatnich a i b oraz dla dowolnego prostokąta R o bokach a i b, równoległych do osi układu współrzędnych, spełnia warunek

$$\iint_R f(x, y)\, dx dy = ab.$$

Pokazać, że $f \equiv 1$ na $\mathbb{R}^2$.

Zestaw VIII

1. Obliczyć całkę niewłaściwą (najpierw uzasadnić jej zbieżność)

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln^{1999} x}{1 + x^2}\, dx.$$

2. Dla $n \geqslant 3$ niech S_n oznacza pole n–kąta foremnego wpisanego w koło o promieniu 1. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=3}^{\infty} (\pi - S_n).$$

3. Uzasadnić, że dla każdego $x \geqslant 0$ równanie $y^3 + xy - 8 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $y(x)$. Następnie obliczyć całkę

$$\int_0^7 y^2(x)\, dx.$$

4. Obliczyć objętość bryły

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 1,\ y^2 + z^2 \leqslant 1,\ x^2 + z^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Sporządzić rysunek.

Zestaw IX*

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej

* Zestaw ten został przygotowany przez dr Teresę Jurlewicz.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - \sqrt[3]{x}}.$$

2. Wykorzystując kryterium całkowe zbieżności szeregów uzasadnić, że podana granica jest właściwa
$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ln(n+1)\right].$$
3. Znaleźć szereg Maclaurina funkcji
$$f(x)=\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}.$$
4. Obliczyć siłę, z jaką cienka jednorodna kwadratowa płytka o boku $2a$ i masie M przyciąga punkt materialny o masie m położony nad środkiem płytki w odległości a.

Zestaw X

1. Zbadać, czy prawdziwe jest zdanie: dla dowolnego ciągu (a_n), malejącego i zbieżnego do 0, istnieje liczba naturalna k taka, że szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_k)^k$$
jest zbieżny. Odpowiedź uzasadnić.
2. Obliczyć pochodną $f^{(2000)}(0)$ funkcji określonej wzorem
$$f(x)=\frac{x^{1000}}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$
3. Znaleźć funkcję f, dla której przekształcenie F określone wzorem
$$F(x,y)=\begin{cases}1 & \text{dla} \quad x^2+y^2<1,\\ f(x,y) & \text{dla} \quad 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\\ 0 & \text{dla} \quad 4<x^2+y^2\end{cases}$$
ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ w każdym punkcie $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią o równaniu
$$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=30xyz.$$

Zestaw XI*

1. Wyrazy szeregu
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

* Zestaw ten został przygotowany przez dr Teresę Jurlewicz.

przestawiono w taki sposób, aby po każdym kolejnym wyrazie dodatnim następowały dwa kolejne wyrazy ujemne. Obliczyć sumy obu szeregów.

2. Niech
$$f(x)=\frac{1}{1+x+x^2+x^3}.$$
Obliczyć $f^{(2000)}(0)$ oraz $f^{(2001)}(0)$.
3. Równanie
$$x\sin^2 x+y\sin^2 y+z\sin^2 z=\frac{5\pi}{12}$$
w pewnym otoczeniu punktu $P_0=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$ określa powierzchnię $z=z(x,y)$. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do tej powierzchni w P_0.
4. Cienka jednorodna płytka ma kształt trójkąta o wierzchołkach $A=(0,0)$, $B=(3,10)$, $C=(20,0)$. W płytce wycięto dwa otwory o średnicach $D_1=4$, $D_2=2$ i środkach odpowiednio $S_1=(4,3)$, $S_2=(10,4)$. Wyznaczyć położenie środka masy tej płytki.

Zestaw XII

1. Dla $n\in\mathbb{N}$ niech a_n oznacza dodatni pierwiastek równania
$$x^{2000}+nx-1=0.$$
Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Odpowiedź uzasadnić.
2. Uzasadnić równości
$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^4}=\int_0^\infty\frac{x^2\,dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$
3. Wśród trójkątów opisanych na kole o promieniu R znaleźć ten, który ma najmniejsze pole. Wykorzystać rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych.
4. Wyznaczyć moment bezwładności jednorodnej bryły
$$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,\quad z\geqslant 0$$
o masie M względem osi $l: x=y=z$.

Zestaw XIII

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

2. Udowodnić poniższe twierdzenie o trzech szeregach:

   Niech szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ będą zbieżne. Ponadto niech wyrazy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ spełniają dla $n \in \mathbb{N}$ nierówności $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$. Wtedy także szere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżny.

3. Wśród trójkątów wpisanych w koło o promieniu 1 znaleźć ten, który ma naj większe pole. Wykorzystać rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych.

4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami
$$z = x^2 + y^2, \qquad z = 1 - x^2 - (y-1)^2.$$
   Czy część wspólna tych powierzchni jest krzywą płaską? Odpowiedź uzasad nić.

Zestaw XIV

1. Obie pochodne cząstkowe mieszane drugiego rzędu funkcji $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ s ciągłe na $\mathbb{R}^2$. Korzystając z twierdzenia o całkach iterowanych pokazać, ż w każdym punkcie $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ zachodzi równość
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

2. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int_\pi^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx.$$

3. Masa jest rozłożona w sposób ciągły na płaskiej cienkiej płytce o dowolnym kształcie. Pokazać, że w każdym punkcie płytki można umieścić prostokątny układ współrzędnych tak, aby momenty bezwładności płytki względem obu osi były jednakowe.

4. Czy istnieje szereg zbieżny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ taki, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n)^3$ jest rozbieżny? Odpowiedź uzasadnić.

Zestaw XV

1. Promienie światła, które są równoległe do wektora $\vec{v} = (0,0,1)$, oświetlają bryłę ograniczoną powierzchniami
$$z = 1 - x^2 - y^2, \quad z = 0.$$
   Znaleźć kształt cienia tej bryły na płaszczyźnie xOy.

2. Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+1)(3+3)(3+5)\ldots(3+(2n-1))}{(7+2)(7+4)(7+6)\ldots(7+2n)}.$$

3. Torus jest bryłą, która powstaje z obrotu koła o promieniu r wokół prostej odległej o $R \geqslant r$ od jej środka. Obliczyć moment bezwładności takiego torusa względem osi obrotu. Przyjąć, że torus jest jednorodny i ma masę M.

4. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int_e^\infty \left(\sqrt[x]{x} - 1\right) dx.$$

Egzamin poprawkowy

Zestaw I

Grupa A

1. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\ln\left(3.02^2 - 1.97^3\right).$$

2. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_4^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4}$.

3. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \sin\frac{n\pi}{2}$.

4. Płaszczyzna $z = z_0$ jest styczna do wykresu funkcji $z = x^2 + xy + y^2 + x + y$. Wyznaczyć z_0.

5. Za pomocą całki podwójnej obliczyć objętość kuli o promieniu R.

6. Wyznaczyć zbiór tych $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$ jest zbieżny. Obliczyć jego sumę.

7. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej

$$\int_0^1 dx \int_{(x-1)^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Narysować obszar całkowania.

8. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami

$$x^2+y^2+z^2=8, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \ (z \geqslant 0).$$

Grupa B

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{xe^{\sqrt{x}}}\,dx.$

2. Za pomocą całki podwójnej obliczyć pole sfery o promieniu R.

3. We wnętrzu pierwszej ćwiartki układu współrzędnych znaleźć ekstrema lo-kalne funkcji

$$z=xy(4-x-y).$$

4. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć wartość przybliżoną wyrażenia

$$\sqrt{8.94}\cdot 1.001^3.$$

5. Obliczyć $y''(0)$ dla funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem

$$3x^2+y^2-2xy=1, \text{ gdzie } y>0.$$

6. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}4^n x^{2n}$$

i wyznaczyć zbiór tych $x\in\mathbb{R}$, dla których jest on zbieżny.

7. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=x^3+3xy^2+y^2$ w punkcie $(x_0,y_0)=(1,1)$, w kierunku wersora $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

8. Niech U oznacza kulę o środku w punkcie $(0,0,0)$ i promieniu 1. Obliczyć całkę potrójną

$$\iiint_U \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz.$$

Grupa C

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x\,dx.$

2. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami

$$z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=4,\ z=0.$$

3. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=e^x\left(2x+y^2\right)$.

4. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$\sqrt{10001}\cdot \ln 1.01^4.$$

5. Wyznaczyć styczną do krzywej $x^2+y^2-xy=1$ w punkcie $(1,1)$.

6. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n}.$$

Wyznaczyć zbiór tych $x\in\mathbb{R}$, dla których szereg ten jest zbieżny.

7. Całkę podwójną $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ zapisać w postaci całki iterowanej, jeżeli obszar całkowania D jest częścią wspólną czterech kół o promieniach 1 i środkach $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(0,1)$, $D=(1,1)$.

8. Pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y)=x^2+y^2$ w punkcie $(x_0,y_0)=(1,0)$ w kierunku wersora $\vec{v}$ jest równa 1. Wyznaczyć $\vec{v}$.

Grupa D

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_{32}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^5}-1}\,dx.$

2. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy.$

3. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y)=x^2+y^2$ na kole $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$.

4. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć wartość przybliżoną wyrażenia

$$\sqrt[3]{8.02}\cdot 2.001^7.$$

5. Wyznaczyć styczną do krzywej $x^2+y^2+6xy-2x-2y=4$ w punkcie $(1,1)$.

6. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}.$$

Wyznaczyć zbiór tych $x\in\mathbb{R}$, dla których szereg jest zbieżny.

7. Pochodna kierunkowa funkcji f w punkcie (x_0, y_0), w kierunku wersora $\vec{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ wynosi 1, a w kierunku wersora $\vec{v}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ma wartość 0. Wyznaczyć pochodną tej funkcji w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wersora $\vec{v} = (1, 0)$.
8. Za pomocą całki potrójnej obliczyć objętość stożka o promieniu podstawy R i wysokości H.

Zestaw II

Grupa A

1. Funkcję $f(x) = \dfrac{2x}{x+4}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Wyznaczyć przedział zbieżności tego szeregu.
2. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(0, 0, z_0)$ do powierzchni $z = x\cos\left(x + y^2\right)$.
3. Zmienić kolejność całkowania w całce
$$\int_{-6}^{0} dx \int_{-\sqrt{-x^2-6x}}^{x+7} f(x, y)\, dy.$$
Narysować obszar całkowania.
4. Obliczyć objętość bryły U określonej nierównościami
$$x^2 + y^2 \leqslant 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9.$$
5. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y) = x^2 - 2y + 1$ na obszarze D określonym nierównościami $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $y \leqslant 0$.
6. Wyznaczyć położenie środka masy ćwiartki jednorodnego pierścienia o promieniach r, R, gdzie $0 < r < R$.
7. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{x+2}{x^3}\, dx$.
8. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4n^2-5}$.

Grupa B

1. Całkę podwójną
$$\iint_D f(x, y)\, dxdy$$
zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar całkowania D określony jest nierównościami $4x^2 - 2 \leqslant y \leqslant x^2 + 1$. Narysować obszar całkowania.
2. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 2$.
3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n(n+1)}.$$
4. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4 + 4n + 1} - n^2\right)$.
5. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x\, dx}{\sqrt{x+2}}$.
6. Obliczyć masę półkola o promieniu R. Powierzchniowa gęstość masy w punkcie jest równa odległości tego punktu od osi symetrii półkola.
7. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 6 - x^2 - y^2.$$
Sporządzić rysunek tej bryły.
8. Wyznaczyć wersor wskazujący kierunek, w którym pochodna kierunkowa funkcji
$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y}{x^3}$$
w punkcie $(1, 1)$ przyjmuje wartość 0.

Grupa C

1. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y) = x + 2y$ na obszarze D określonym nierównościami $0 \leqslant y \leqslant \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.
2. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_{3}^{\infty} \frac{4\, dx}{x^2 - 4}$.
3. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n! + 3}$.
4. Wyznaczyć położenie środka masy jednorodnego wycinka koła o promieniu R i kącie rozwarcia $\dfrac{2\pi}{3}$.
5. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}.$$

6. Obliczyć całkę potrójną

$$\iiint\limits_U dxdydz,$$

gdzie obszar całkowania U jest określony nierównościami

$$y \geqslant x^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1-y^2.$$

7. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji

$$f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$$

w punkcie $(x_0, y_0) = (2,1)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

8. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x-1}^{|x-1|+1} f(x,y)\,dy.$$

Narysować obszar całkowania.

Grupa D

1. Obliczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = \left(4x^2+2y\right)e^y$.
2. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego trójkąta prostokątnego równoramiennego o przeciwprostokątnej a oraz masie M, względem jego osi symetrii.
3. Obliczyć objętość bryły

$$U = \left\{(x,y,z):\ -1 \leqslant y \leqslant 1-|x|,\ \ x^2-4 \leqslant z \leqslant 1-y^2\right\}.$$

4. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = x^y + y^2$ w punkcie $(x_0, y_0) = (1,2)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$.
5. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{1}{2^n}$.
6. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_2^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$.
7. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+3}(x+1)^n.$$

8. Całkę podwójną

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

zamienić na całkę iterowaną, jeżeli obszar całkowania określony jest nierównościami $x^2-4x \leqslant y \leqslant x$, $x \geqslant 2$. Sporządzić rysunek obszaru D.

Zestaw III

Grupa A

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.
2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$.
3. Funkcję $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Określić przedział zbieżności tego szeregu.
4. Za pomocą różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$\sqrt{4.05^2+3.07^2}.$$

5. Wyznaczyć równanie stycznej w punkcie $(1, y_0)$ do wykresu funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem

$$x^3+y^3+xy = 1.$$

6. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2+xy+y^2-3x-6y$.
7. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego prostokąta o bokach $a = 10$, $b = 20$ i masie $M = 200$ względem dłuższego boku.
8. Obliczyć współrzędne środka masy półkuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$, jeśli gęstość masy w każdym punkcie tej półkuli jest równa jego odległości od początku układu współrzędnych.

Grupa B

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_1^{9} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.
2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^n}{n}.$$

3. Funkcję $f(x) = x^2e^{-x}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Określić przedział zbieżności tego szeregu.
4. Za pomocą różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$2.01^{3.03}.$$

5. Wyznaczyć równanie stycznej w punkcie $(1, y_0)$ do wykresu funkcji uwkłanej $y = y(x)$ określonej wzorem
$$x^2 \ln y - y \ln x = 0.$$
6. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 - 2x + 3y^2 + 6y$.
7. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $a = 10$, $b = 20$ i masie $M = 100$, względem dłuższej przyprostokątnej.
8. Obliczyć współrzędne środka masy jednorodnej bryły ograniczonej powierzchniami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Grupa C

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$.
2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x-2)^n}{n}.$$
3. Funkcję $f(x) = xe^{x^2+1}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Określić przedział zbieżności tego szeregu.
4. Za pomocą różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\sqrt{1.02^2 + 1.97^3}.$$
5. Wyznaczyć równanie stycznej w punkcie $(0, y_0)$ do wykresu funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej wzorem
$$xe^y - y^2 \ln y = 0.$$
6. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = 9x^2 - 6x + 3y^2 - 6y$.
7. Obliczyć moment statyczny względem osi Ox jednorodnego półkola $x^2+y^2 \leqslant 1$, $y \geqslant 0$ o masie $M = \frac{\pi}{2}$.
8. Obliczyć współrzędne środka masy jednorodnej bryły ograniczonej powierzchniami $z = 1$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Grupa D

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\,dx$.
2. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\sqrt{n}}$.

3. Funkcję $f(x) = \frac{x}{x^4+16}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Określić przedział zbieżności tego szeregu.
4. Za pomocą różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$1.94^2 e^{0.12}.$$
5. Wyznaczyć równanie stycznej w punkcie $(0, y_0)$ do wykresu funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej wzorem
$$x^2 e^y + ye^x - 1 = 0.$$
6. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = 4x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 6y$.
7. Obliczyć moment statyczny jednorodnego kwadratu o boku $a = 10$ i masie $M = 100$, względem jego przekątnej.
8. Obliczyć współrzędne środka masy jednorodnej bryły ograniczonej powierzchniami $z = 1$, $z = x^2 + y^2$.

Zestaw IV

Grupa A

1. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int_2^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4 + x + 1}.$$
2. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$. Korzystając z tego rozwinięcia wyznaczyć $f^{(18)}(0)$.
3. Napisać równanie stycznej w punkcie $(2, 2)$ do wykresu funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem $x^3 + x - y^3 - y = 0$.
4. Obliczyć pochodną kierunkową $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,1)$ funkcji $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
5. Obliczyć całkę $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, gdzie D jest obszarem położonym w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i ograniczonym krzywymi $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$, $y = 0$. Zastosować współrzędne biegunowe. Sporządzić rysunek.
6. Wyznaczyć współrzędne środka masy jednorodnego obszaru ograniczonego krzywymi $y = -x + 1$, $y = 0$, $x = 0$.

7. Korzystając z całki potrójnej obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami
$$z=\sqrt{9-x^2-y^2},\quad z=\sqrt{x^2+y^2}.$$
Zastosować współrzędne sferyczne. Sporządzić rysunek tej bryły.

8. Wyznaczyć poziomice funkcji $f(x,y)=2+\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ oraz narysować poziomicę przechodzącą przez punkt $(4,4)$.

Grupa B

1. Obliczyć pole płata Σ o równaniu $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ wyciętego powierzchnią $x^2+y^2=1$. Zastosować współrzędne biegunowe.

2. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednorodnego ($\gamma_0=1$) obszaru U ograniczonego powierzchniami $z=1$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Zastosować współrzędne walcowe.

3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}(x-2)^n.$$

4. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całki niewłaściwej
$$\int_1^{\infty}\frac{\left(2x^2+1\right)dx}{4x^5+x-1}.$$

5. Korzystając z definicji obliczyć pochodną cząstkową
$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},2\right),\text{ gdzie } f(x,y)=\frac{\arcsin x}{y^2}.$$

6. W całce iterowanej
$$\int_0^1 dy\int_{y^3}^{\sqrt[4]{y}} f(x,y)\,dx$$
zmienić kolejność całkowania i naszkicować obszar całkowania.

7. Obliczyć granicę $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^3-y^3}{x-y}$. Uzasadnić, że podana poniżej granica nie istnieje.
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+3xy-y^2}{5x^2+7y^2}.$$

8. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=(x-2)^2+(y+3)^2+7$.

Grupa C

1. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem
$$x^2+y^2-xy-2x+4y=0.$$

2. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^e\frac{\ln x}{x}\,dx$.

3. Wyznaczyć masę kuli $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ o objętościowej gęstości masy $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Zastosować współrzędne sferyczne.

4. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego koła o średnicy 2 i masie M, względem jego środka.

5. Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},z_0\right)$ do wykresu funkcji $z=\frac{\arcsin x}{\arccos y}$.

6. Niech $P_n=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i},\left(1+\frac{3}{4n}\right)^n,\log_{n+1}2\right)$. Obliczyć granicę $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$.

7. Obliczyć całkę podwójną $\iint\limits_R\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$, gdzie $R=[0,1]\times[0,1]$.

8. Wyznaczyć sumę częściową i następnie obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Grupa D

1. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x,y,z)=\frac{xy^2z^3}{6}$ na prostopadłościanie $P=[0,1]\times[0,2]\times[0,3]$.

2. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+3}$.

3. Korzystając z całki podwójnej obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami
$$z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z=0,\quad x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=9.$$
Zastosować współrzędne biegunowe. Sporządzić rysunek.

4. Narysować dziedzinę i wyznaczyć zbiór wartości funkcji
$$f(x,y)=2\arcsin\left((x-2)^2+(y+3)^2-3\right).$$

5. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć wartość przybliżoną wyrażenia
$$1.02^{2.97}.$$

6. Znaleźć współrzędne środka masy jednorodnej bryły U określonej nierównościami $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Zastosować współrzędne sferyczne. Sporządzić rysunek.

7. Obliczyć drugą pochodną $y''(4)$ funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem
$$x^2+y^2-2x-24=0,$$
której wykres przechodzi przez punkt $(4,4)$.

8. Zbadać bezwzględną zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$.

Zestaw V

Grupa A

1. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\operatorname{tg}\frac{58^\circ}{2.03}.$$

2. We wnętrzu kwadratu $P=[0,\pi]\times[0,\pi]$ znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=\sin x \sin y \sin(x+y)$.

3. Niech $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$. Narysować zbiór
$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)>0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)>0\right\}.$$

4. Powołując się na twierdzenie o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregu potęgowego wyznaczyć promień zbieżności szeregu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} 2nx^{n-1}$ i obliczyć jego sumę w punkcie x_0 należącym do przedziału zbieżności.

5. Przy pomocy całki niewłaściwej obliczyć pole obszaru D zawartego w półpłaszczyźnie $x \geqslant 0$, ograniczonego osią Ox oraz wykresem funkcji
$$y=\frac{x}{x^4+16}.$$

6. Obliczyć masę M obszaru D ograniczonego krzywymi $y=e^x$, $y=\left|1-x^3\right|$, $x=2$, jeżeli powierzchniowa gęstość masy ma postać $\sigma(x,y)=2xy$.

7. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x,y)=x+y$ na obszarze D ograniczonym krzywymi $y=x^2-1$, $x=(y+1)^2$.

8. Korzystając ze współrzędnych sferycznych obliczyć całkę potrójną
$$\iiint_U \frac{dxdydz}{x^2+y^2+2z^2},$$
gdzie obszar U określony jest warunkami
$$4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 16,\quad x\geqslant 0,\quad y \geqslant 0,\quad z\geqslant 0.$$

Grupa B

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

2. Wyznaczyć płaszczyznę styczną w punkcie $\left(-3, y_0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ do wykresu funkcji $z=\operatorname{arctg}\left(x^2+y\right)$.

3. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x,y)=x^2-y^2$ na kwadracie o wierzchołkach $A=(-2,0)$, $B=(2,0)$, $C=(0,-2)$, $D=(0,2)$.

4. Obliczyć $\dfrac{\partial F}{\partial u}$, jeżeli funkcja F określona jest wzorem
$$F(u,v)=f(x(u,v),y(u,v)),$$
gdzie $f(x,y)=x-\dfrac{y}{x}$ oraz $u=\dfrac{x}{y}$, $v=x-y$.

5. Dla jakiego $p>1$ wartość średnia funkcji $f(x,y,z)=\dfrac{xy+xz+yz}{xyz}$ na sześcianie $P=[1,p]\times[1,p]\times[1,p]$ jest równa $\ln p$?

6. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D 2y\,dxdy,$$
gdzie obszar D ograniczony jest krzywymi
$$y=\cos\frac{\pi}{2}x,\quad x+y=0,\quad |x-y|=1.$$

7. Leżący na płaszczyźnie $y=0$ łuk $z=x^2$, gdzie $x\in[0,2]$, obracamy wokół osi Oz najkrótszą drogą do płaszczyzny $y=\sqrt{3}x$. Obliczyć pole powierzchni płata Σ zakreślonego przez łuk podczas obrotu.

8. Wyznaczyć wszystkie wartości $x\in\mathbb{R}$, dla których zbieżny jest szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{x^n\cdot n^3}.$$

Grupa C

1. Wyznaczyć zbiór tych dodatnich wartości parametru a, dla których szereg
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n+3^n}{2^n+5^n}$$
jest rozbieżny.

2. Obliczyć wartość średnią funkcji $f(x,y,z)=\frac{yz}{x}$ na obszarze U będącym graniastosłupem o wierzchołkach $A=(1,0,0)$, $B=(2,0,0)$, $C=(2,2,0)$, $A'=(1,0,2)$, $B'=(2,0,2)$, $C'=(2,2,2)$.

3. Obszar D jest częścią koła o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu 2, określoną przez warunki $y>0$, $x\leqslant y^2-4$. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D y\,dxdy.$$

4. Obliczyć masę M obszaru D określonego nierównościami $x^2+(y+1)^2\leqslant 1$, $x\leqslant 0$, jeżeli powierzchniowa gęstość masy ma postać $\sigma(x,y)=2xy$.

5. Wyznaczyć płaszczyznę styczną w punkcie $\left(1,y_0,\sqrt{3}\right)$, gdzie $0<y_0<\frac{\pi}{2}$, do wykresu funkcji $z=\operatorname{tg}x^2y$.

6. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y=y(x)$ zadanej równaniem
$$\frac{x^3}{3}+xy^2+\frac{16}{3}=x^2y+4x,$$
gdzie $x\geqslant y$.

7. Przy pomocy całki niewłaściwej obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi $y=\ln x^2$, $y=\ln\frac{1}{x^2}$, $x=0$.

8. Dla funkcji określonej wzorem $f(x,y)=\sqrt{x^2-\frac{y}{x}}$ wyznaczyć i narysować dziedzinę naturalną oraz poziomicę odpowiadającą poziomowi $h=2$.

Grupa D

1. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy,$$
gdzie obszar całkowania D jest ograniczony krzywe
$$y=\ln x,\quad y=1,\quad y=x,\quad y+x=1.$$

2. Zadane na płaszczyźnie xOz wykresy funkcji $z=|x|$ oraz $z=-|x|$ obracamy wokół osi Oz. Korzystając ze współrzędnych sferycznych obliczyć masę M obszaru U ograniczonego powstałymi w ten sposób powierzchniami i sferą $x^2+y^2+z^2=4$, jeżeli jego objętościowa gęstość masy wyraża się wzorem $\sigma(x,y,z)=(z+1)^2$.

3. Przy pomocy całki podwójnej obliczyć pole obszaru D określonego nierównościami
$$x^2+y^2\geqslant 1,\quad (y-1)^2+x^2\leqslant 1,\quad y\geqslant\sqrt{3}|x|.$$

4. Dla funkcji $f(x,y,z)=xy-ze^y-\frac{zy}{x}+\frac{1}{z}$ wyznaczyć zbiór D tych punktów $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, dla których spełniona jest równość
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y\partial z}(x,y,z)=\frac{1}{4}.$$

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=\frac{y^2-x}{e^x}$.

6. Obliczyć promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(2n)!}{2^n n^{2n}}$.

7. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$.

8. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\frac{\ln\frac{5.94}{2.1}}{2.97^2}.$$

Zestaw VI

Grupa A

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^3\frac{\operatorname{arctg}x}{\sqrt{x^3}}\,dx$.

2. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x)=x\sin x\cos x$. Korzystając z otrzymanego rozwinięcia obliczyć $f^{(117)}(0)$.

3. Zbadać ciągłość funkcji $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+xy)}{y} & \text{dla } y\neq 0 \text{ oraz } x\in\mathbb{R},\\ x & \text{dla } y=0 \text{ oraz } x\in\mathbb{R}.\end{cases}$

4. Wysokość i średnica podstawy stożka zmierzone z dokładnością 0,1 cm wynoszą odpowiednio 4 i 6 cm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole powierzchni bocznej tego stożka?

5. Wiedząc, że funkcja f ma ciągłe drugie pochodne cząstkowe znaleźć $\frac{\partial g}{\partial y}$ i $\frac{\partial^2 g}{\partial z\partial y}$ dla funkcji $g(x,y,z)=f(xy,x-z)$.

6. Obliczyć pole płata Σ wyciętego z powierzchni $z = \sqrt{x^2+y^2}-2$ przez walec $x^2+y^2=2x$. Naszkicować rysunek.

7. Zamienić na całki iterowane całkę podwójną
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy,$$
gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $y = 1-|x|$, $y = x^2+x$.

8. Wyznaczyć współrzędne środka masy jednorodnej bryły U ograniczonej powierzchniami $z^2 = x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2 = 2z$ i zawierającej punkt $(0,0,1)$.

Grupa B

1. Korzystając z definicji obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$.

2. Znaleźć promień i przedział zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n\ln^2 n}$.

3. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\sqrt[1.99]{3.98}.$$

4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

5. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D 2x^2y\,dxdy,$$
gdzie D jest obszarem ograniczonym osiami układu współrzędnych oraz krzywą $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 1$.

6. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami
$$z = -3, \quad z = xy, \quad x^2+y^2 = 1.$$
Sporządzić rysunek.

7. Obliczyć moment bezwładności względem początku układu współrzędnych dodatniego oktantu wydrążonej kuli o promieniu wewnętrznym 1 i zewnętrznym 2, jeżeli objętościowa gęstość masy w punkcie jest odwrotnie proporcjonalna do jego odległości od punktu $(0,0,0)$, a masa bryły wynosi 4.

8. Wyznaczyć współrzędne środka masy jednorodnej bryły U ograniczonej powierzchniami $z = \sqrt{x^2+y^2}-2$, $x^2+y^2 = 4$, $z = x^2+y^2$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne walcowe.

Grupa C

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{2+x}$.

2. Napisać wzór Taylora z resztą R_3 dla funkcji $f(x,y) = x\ln y$ i punktu $(1,e)$.

3. Zbadać ciągłość funkcji $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin 2xy}{x} & \text{dla } x \neq 0 \text{ oraz } y \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \text{ oraz } y \in \mathbb{R}. \end{cases}$

4. W kierunku jakiego wersora $\vec{v}$, pochodna kierunkowa funkcji
$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+y}$$
w punkcie $(0,1)$ przyjmuje wartość 0?

5. Zamienić na całki iterowane całkę podwójną
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy,$$
gdzie D jest położonym w pierwszej ćwiartce układu obszarem ograniczonym krzywymi $x^2+y^2 = 1$, $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 1$. Sporządzić rysunek.

6. Obliczyć masę jednorodnej ($\gamma_0 = 1$) bryły U ograniczonej powierzchniami
$$z = 2^{-(x^2+y^2)} - \frac{1}{2}, \quad z = x^2+y^2-1$$
Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne walcowe.

7. Obliczyć moment statyczny względem płaszczyzny yOz jednorodnej ($\gamma_0 = 1$) bryły ograniczonej powierzchniami
$$y = -x,\ y = 2-x^2,\ x+y-2z = 0,\ z = 0.$$
Sporządzić rysunek.

8. Obliczyć pole powierzchni bocznej Σ bryły ograniczonej wykresami funkcji
$$z = 4-x^2-y^2, \quad z = x^2+y^2-4, \quad z = -3, \quad z = 3.$$
Sporządzić rysunek.

Grupa D

1. Korzystając z definicji obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(3+x)\sqrt{x}}$.

2. Stosując odpowiednie twierdzenia o szeregach potęgowych obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)e^n}.$$

3. Wyznaczyć dziedzinę funkcji
$$f(x,y) = \arcsin\frac{y-1}{x^2}.$$
Zbadać, czy jest ona zbiorem ograniczonym, otwartym, domkniętym, obszarem. Określić i naszkicować poziomice tej funkcji.

4. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji uwikłanej $y = y(x)$ zadanej równaniem $x\ln y - y\ln x - x = 1$ w punkcie jej przecięcia z prostą $y = x$.

5. Zapisać całkę iterowaną
$$\int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{x+y} \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
we współrzędnych walcowych. Naszkicować obszar całkowania.

6. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej płaszczyzną $z = 0$, walcem $x^2+y^2 = 8x$ oraz stożkiem $x^2+y^2 = 4z^2$, $(z \geqslant 0)$. Sporządzić rysunek.

7. Wyznaczyć współrzędne środka masy jednorodnego wycinka kuli o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 1 ograniczonego półpłaszczyznami $y = 0$ i $y = x$.

8. Całkę po obszarze ograniczonym krzywymi $y = 2-x^2$, $y = 2|x|-1$ zamienić na całki iterowane. Sporządzić rysunek tego obszaru.

Zestaw VII

Grupa A

1. Dokonując zamiany zmiennych obliczyć całkę
$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz.$$

2. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}}\, dx$.

3. Obliczyć całkę iterowaną $\displaystyle\int_1^3 dy \int_y^{y^2} (x+y)\, dx$.

4. Podać przykład funkcji f, dla której $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = xy + x$.

5. Podać przykład szeregu potęgowego o przedziale zbieżności $(0,4]$. Odpowiedź uzasadnić

6. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy^2$.

7. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = 5x^2 + 5y^2 + 10 + 14x - 2y$.

8. Obliczyć współrzędne środka masy jednorodnej figury D ograniczonej krzywymi $y = x^4$, $y = 1$.

Grupa B

1. W całce $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt[4]{x}} f(x,y)\, dy$ zmienić kolejność całkowania.

2. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y+\frac{1}{z}}$.

3. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+9}$.

4. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n n^3}$.

5. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oy jednorodnej $(\sigma_0 = 1)$ figury D ograniczonej krzywymi $y = x^2$ i $x = y^2$.

6. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(2,1,z_0)$ do powierzchni $z = x^4 + y^5$.

7. Obliczyć całkę iterowaną $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-1}^0 dx \int_0^2 xy^2z^3\, dz$.

8. Podać przykład funkcji ciągłej f, która w punkcie $(-2,3)$ ma minimum lokalne równe 7.

Grupa C

1. Obliczyć całkę iterowaną $\displaystyle\int_{-1}^0 dy \int_0^2 dx \int_0^1 xyz\, dz$

2. W całce $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^3}^1 f(x,y)\, dy$ zmienić kolejność całkowania.

3. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y) = 2x - 3y$ na obszarze określonym nierównościami $0 \leqslant x \leqslant 5$, $x \leqslant y \leqslant 2x$.

4. Funkcję $f(x) = x\cos x^2$ rozwinąć w szereg Maclaurina.

5. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_1^\infty \frac{3x\,dx}{(4+x^2)^2}$.

6. Obliczyć moment bezwładności względem osi Ox jednorodnego ($\sigma_0 = 1$) trójkąta D o wierzchołkach $A = (1,0)$, $B = (3,1)$, $C = (3,3)$.

7. Podać przykład funkcji f, dla której $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = x + y$.

8. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji
$$f(x,y) = \sin\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Grupa D

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_1^\infty xe^{-x^2}\,dx$.

2. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji $f(x,y) = \ln xe^{xy}$.

3. Obliczyć całkę potrójną
$$\iiint\limits_U y\sin\pi x\,dxdydz,$$
jeżeli obszar całkowania U ograniczony jest powierzchniami $z = 1-y^2$, $z = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

4. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = x^3y^2$ w punkcie $(x_0,y_0) = (2,3)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = xe^{-x^2}$.

6. Podać przykład funkcji ciągłej f, która w punkcie $(2,-1)$ ma maksimum lokalne równe 5.

7. Obliczyć moment bezwładności względem początku układu współrzędnych jednorodnej ($\sigma_0 = 1$) figury D ograniczonej krzywymi $y = x^2-1$, $y = 1-x^2$.

8. Obliczyć całkę iterowaną $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{(x-1)^2}^1 xy\,dy$.

Zestaw VIII

Grupa A

1. Wyznaczyć wszystkie wartości $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg
$$1 - \ln x + \ln^2 x - \ln^3 x + \ldots$$
jest zbieżny. Obliczyć jego sumę.

2. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję
$$f(x) = \frac{1}{(2-x)(x+1)}.$$
Wyznaczyć przedział zbieżności otrzymanego szeregu.

3. Uzasadnić, że równanie $y - \sqrt{y}e^{\frac{x}{y}} = 0$ określa na otoczeniu punktu $(0,1)$ funkcję uwikłaną $y = y(x)$. Napisać równanie stycznej do wykresu tej funkcji w puncie $(0,1)$.

4. Znaleźć trzy liczby nieujemne o sumie 1, których iloczyn jest największy.

5. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{|x|}} f(x,y)\,dy.$$
Naszkicować obszar całkowania.

6. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z = 2 - x^2 - y^2.$$

7. Obliczyć całkę potrójną
$$\iiint\limits_U y\cos\pi x\,dxdydz,$$
gdzie obszar całkownia U jest ograniczony powierzchniami $z = 1-y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

8. Obliczyć moment statyczny względem płaszczyzny xOy jednorodnego ($\gamma_0 = 1$) obszaru określonego nierównościami
$$1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 3, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0.$$
Zastosować współrzędne sferyczne.

Grupa B

1. Wyznaczyć promień i przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}4^n}.$$

2. Sprawdzić z definicji, czy funkcja $f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 y}$ ma pochodną kierunk ową w punkcie $(x_0, y_0) = (1, 1)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Wśród prostopadłościanów o sumie długości wszystkich krawędzi równej d znaleźć ten, który ma największą objętość.

4. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\sqrt{3.98}\ln 1.02.$$

5. Obliczyć pole płata Σ wyciętego z wykresu funkcji $z = 1 + x^2 + y^2$ walcem o równaniu $x^2 + y^2 = 3$. Sporządzić rysunek.

6. Obliczyć moment statyczny względem osi Ox jednorodnego obszaru D o masie M ograniczonego krzywymi $y = 0$, $y = \sqrt{4-(x-2)^2}$. Sporządzić rysunek.

7. Całkę podwójną
$$\iint_D f(x, y)\, dxdy,$$
zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar całkowania D ograniczony jest krzywymi $y - x - 2 = 0$, $y - x^2 + 2x - 2 = 0$. Naszkicować obszar całkowania.

8. Wyznaczyć współrzędne środka masy bryły U ograniczonej płaszczyzną $z = 0$ oraz powierzchniami
$$z = -\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad z = -\sqrt{1-x^2-y^2},$$
jeżeli objętościowa gęstość masy dana jest wzorem
$$\gamma(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$
Zastosować współrzędne sferyczne. Sporządzić rysunek.

Grupa C

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cos n}{(2n)!}$.

2. Pojemność zbiornika w kształcie walca zmierzona z dokładnością $0,1\,\mathrm{cm}^3$ wynosi $8\pi\,\mathrm{m}^3$, jego wysokość zmierzona z dokładnością $0,1\,\mathrm{cm}$ wynosi 2 m. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć średnicę tego zbiornika?

3. Obliczyć pochodną $y'(1)$ funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem $x^y = y^x$.

4. Podać dziedzinę, zbiór wartości oraz określić poziomice funkcji
$$f(x, y) = \arcsin\left(1 - x^2 - y^2\right).$$

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = \left(x^2 + y\right)\sqrt{e^y}$.

6. Obliczyć pole płata Σ wyciętego z powierzchni
$$z = 1 - x^2 - y^2$$
przez płaszczyzny $z = -1$, $z = -3$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne biegunowe.

7. Obliczyć masę obszaru D ograniczonego krzywymi $y^2 = x$, $4y = x$, $x = 1$ o powierzchniowej gęstości masy $\sigma(x, y) = x + y$.

8. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednorodnej $(\gamma_0 = 1)$ bryły U ograniczonej powierzchniami
$$z = \sqrt{4-x^2-y^2} \quad \text{oraz} \quad z = \sqrt{x^2+y^2}.$$
Zastosować współrzędne sferyczne.

Grupa D

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{4+x^2}$.

2. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = \frac{x}{x^2+9}$. Wyznaczyć przedział zbieżności otrzymanego szeregu.

3. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ zadanej równaniem
$$x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0.$$

4. Dana jest różniczkowalna funkcja $z = f(x, y)$. Wyrażenie
$$w(x, y) = x\frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1-y^2}\frac{\partial z}{\partial y}$$
przedstawić jako funkcję zmiennych u i v, jeżeli $u = \ln x$, $v = \arcsin y$.

5. Wyznaczyć wersor wskazujący kierunek, w którym pochodna kierunkowa funkcji
$$f(x, y) = \frac{x}{y} - \sin x^2 y$$
w punkcie $(0, 1)$ przyjmuje wartość 0.

6. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D \frac{x\, dxdy}{y^2},$$
gdzie D jest obszarem ograniczonym krzywymi $y = x$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$, $x = 4$. Sporządzić rysunek.

7. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$y = x^2, \quad z = 0, \quad x + y + z = 2.$$
Sporządzić rysunek tej bryły.

8. Obliczyć moment statyczny względem płaszczyzny xOy jednorodnej ($\gamma_0 = 1$) bryły U ograniczonej powierzchnią stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$, płaszczyzną $y = 0$ oraz półsferą $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$. Zastosować współrzędne sferyczne. Sporządzić rysunek.

Zestaw IX

Grupa A

1. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+n+1}{n^2+2}(x-2)^n.$$

2. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \sin^2\left(x^2+y^3\right)$ w punkcie $(x_0,y_0) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}, 0\right)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

3. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2+9x-6xy+y^3-12y$.

4. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\frac{2.98 \cdot 2.001}{2.98^2 - 2.001^3}.$$

5. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{-1}^{1+|x|} f(x,y)\,dy$.

6. Obliczyć masę M walca o promieniu podstawy R i wysokości H. Objętościowa gęstość masy w punkcie jest równa kwadratowi odległości tego punktu od osi symetrii walca.

7. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint\limits_D \left(x^2+y\right)\,dxdy,$$
w której obszarem całkowania jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-1,2)$, $B = (2,-1)$, $C = (5,2)$.

8. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^4}$.

Grupa B

1. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = 1-x^3-12x-6xy+y^2+9y$.

2. Znaleźć masę cienkiego kawałka blachy w kształcie półkola o promieniu r. Powierzchniowa gęstość masy w punkcie jest równa kwadratowi odległości tego punktu od środka półkola.

3. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej $\int\limits_{-1}^{3} dx \int\limits_{-2}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy$.

4. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!-5}$.

5. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(4,2,z_0)$ do powierzchni
$$z = (\ln x - 2\ln y)^2.$$

6. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia
$$\frac{1.98^3}{4.002^4}.$$

7. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint\limits_D (2x+3y)\,dxdy,$$
w której D jest obszarem ograniczonym krzywymi $y = 1-|x|$, $y = -1$.

8. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami
$$x^2+y^2 = 9, \quad z = 1-x, \quad z = 5.$$

Grupa C

1. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji
$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y} + \ln xy^2$$
w punkcie $(x_0,y_0) = (2,3)$ w kierunku wersora $\vec{v} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

2. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint\limits_D (x-y)\,dxdy,$$
w której obszarem całkowania jest trójkąt o wierzchołkach $A = (1,2)$, $B = (5,2)$, $C = (3,4)$.

3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+2}{4^n+3}(x+2)^n.$$

4. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$x^2+y^2 = 16, \quad z = 6-x, \quad z = 1.$$

5. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{4n^3+n+1}$.

6. Obliczyć błąd bezwzględny powstały przy wyznaczaniu objętości U stożka o promieniu podstawy $r = 4$ i wysokości $h = 3$ przy dokładności pomiaru podstawy 0.01 i wysokości 0.1.

7. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{-1-x^2}^{1} f(x,y)\,dy$.

8. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = 2 - x^2 - 13x + 6xy - y^2 + 24y$.

Grupa D

1. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami
$$x^2 + y^2 = 4, \quad z = y + 1, \quad z = 7.$$

2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 + y - 2\ln xy$.

3. Obliczyć błąd bezwzględny powstały przy wyznaczaniu powierzchni całkowitej P walca o promieniu podstawy $r = 3$ i wysokości $h = 2$ przy dokładności pomiarów podstawy 0.1 i wysokości 0.01.

4. Wyznaczyć promień i przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+3}{4^n}(x-2)^n.$$

5. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{-3}^{2|x|} f(x,y)\,dy$.

6. Obliczyć masę M cienkiego kawałka blachy w kształcie trójkąta równobocznego o boku a. Powierzchniowa gęstość masy w punkcie jest równa odległości tego punktu od jednej ustalonej wysokości trójkąta.

7. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+6n+1}{2n^4+n+1}$.

8. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $\left(0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}, z_0\right)$ do powierzchni
$$z = \operatorname{tg}^2\left(x + y^2\right).$$

Zestaw X

Grupa A

1. Obliczyć pole figury ograniczonej wykresem funkcji $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ oraz prostymi $x = 0$, $x = 1$ i $y = 0$. Sporządzić rysunek.

2. Sformułować kryterium Leibniza i wykorzystać go do zbadania zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

3. Funkcja $g(r)$ ma ciągłą pochodną na $\mathbb{R}$. Niech $f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Obliczyć $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ oraz sprawdzić, że
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{dg}{dr}\right)^2.$$

4. Długość, szerokość i wysokość prostopadłościanu zmierzone z dokładnością 5 cm wynoszą odpowiednio 12 m, 4 m i 3 m. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć długość przekątnej tego prostopadłościanu?

5. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej przez równanie $x^2 - xy - y^2 + 5 = 0$.

6. Naszkicować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce
$$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1}^{1-\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

7. Obliczyć pole płata Σ wyciętego z powierzchni $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ przez walec $x^2 + y^2 = 2y$.

8. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednorodnego ($\gamma_0 = 1$) obszaru U określonego przez nierówności $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne sferyczne.

Grupa B

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4+2x^2+5}$.

2. Wyznaczyć szereg Maclaurina funkcji $f(x) = \frac{x}{3+x}$ i określić jego przedział zbieżności.

3. Wyznaczyć wersor $\vec{v}$ wskazujący kierunek, w którym pochodna kierunkowa $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,1)$ funkcji $f(x,y) = \arcsin \frac{y}{x}$ jest równa 0.

4. Na podstawie pomiarów bryły substancji ustalono, że jej objętość wynosi $V = 15 \pm 1\ \text{cm}^3$, a masa $M = 105 \pm 5$ g. Z jaką w przybliżeniu dokładnością, można obliczyć gęstość masy tej substancji?

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$.

6. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint_D y\,dxdy,$$
jeżeli obszar D określony jest przez nierówności $x^2-2x+y^2 \leqslant 0$, $y \geqslant 0$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne biegunowe.

7. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $y+z=1$, $z=1-y^2$, $x=0$, $x=2$. Sporządzić rysunek.

8. Obliczyć moment statyczny względem płaszczyzny yOz jednorodnego $(\gamma_0=1)$ obszaru U określonego przez nierówności $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2$, $x \geqslant 0$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne sferyczne.

Grupa C

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\displaystyle\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

2. Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{4^n(n+2)^3}.$$
Sformułować wykorzystane kryterium.

3. Znaleźć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ w punkcie $(1,\sqrt{3})$ w kierunku wersora tworzącego kąt $\dfrac{\pi}{3}$ z dodatnim kierunkiem osi Ox.

4. W biegu na 100 m odległość zmierzona jest z dokładnością 0.1 m, a czas z dokładnością 0.01 sek. Z jaką w przybliżeniu dokładnością obliczona zostanie średnia prędkość zawodnika, który uzyskał czas 10.00 sek?

5. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y)=x^2-3y^2$ na kwadracie ograniczonym prostymi $x=-1$, $x=1$, $y=-1$ i $y=1$.

6. Naszkicować obszar całkowania i zmienić kolejność całkowania w całce
$$\int_0^1 dy \int_{-2+\sqrt{2y-y^2}}^{1} f(x,y)\,dx.$$

7. Obliczyć pole płata Σ wyciętego z powierzchni $z=1-x^2-y^2$ przez walec $x^2+y^2=2$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne biegunowe.

8. Obliczyć moment bezwładności względem początku układu współrzędnych jednorodnego $(\gamma_0=1)$ obszaru U ograniczonego płaszczyzną $z=2$ i powierzchnią stożka $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne sferyczne.

Grupa D

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}}\,dx$. Sformułować wykorzystane kryterium.

2. Wyznaczyć promień i przedział zbieżności szeregu potęgowego
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n+1}}{n(n+1)}(x-1)^n.$$

3. Wyznaczyć wersor $\vec{v}$ wskazujący kierunek, w którym pochodna kierunkowa $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(e,0)$ funkcji $f(x,y)=(y+1)^x-ex$ ma wartość 0.

4. Zamówiono 1 m^3 korka o gęstości masy $0.25\pm0.05\ \frac{g}{cm^3}$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć masę zamówionego towaru, jeśli wiadomo, że jego objętość określono z dokładnością 0.05 m^3?

5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2\right)$.

6. Przy pomocy całki podwójnej obliczyć pole obszaru określonego przez nierówności $x^2+y^2-2y \geqslant 0$, $x^2+y^2-4y \leqslant 0$ i $y \leqslant x$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne biegunowe.

7. Obliczyć objętość obszaru ograniczonego powierzchniami $z=y^2$, $y-z=0$, $x=0$ i $x=2$. Sporządzić rysunek.

8. Obliczyć moment statyczny względem płaszczyzny xOz jednorodnego $(\gamma_0=1)$ obszaru U określonego przez nierówności $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3$, $y \geqslant 0$ i $z \geqslant 0$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne sferyczne.

Odpowiedzi i wskazówki

Egzamin podstawowy

Zestaw I

Grupa A

1. $\Delta S \approx \frac{7\pi}{125} \approx 0.176$.
2. 1.
3. $(x_C, y_C) = \left(0, \frac{4}{3\pi}R\right)$.
4. $\frac{15}{32}$.
5. $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.
6. $|\Sigma| = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5}\right)$.
7. $I_z = \frac{2MR^2}{5}$.
8. $z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot p'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot r'(t)$,
   $z''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(p'(t)\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}p'(t) \cdot r'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(r'(t)\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot p''(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot r''(t)$.

Grupa B

1. $\sqrt[3]{6.01^3 - 2.98^3 - 4.03^3} \approx 5.0024$.
2. $(x_C, y_C, z_C) = \left(\frac{4}{\pi}, 0, 2\right)$.
3. $\frac{\pi}{4}$.
4. $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\sqrt[3]{7}, 1\right) = \frac{12\sqrt[3]{49} - 5}{52}$.
5. $I_x = \frac{Ma^2}{48}$.
6. $y = -ex + 1$.

7. W punkcie $(1, 0)$ funkcja f ma minimum lokalne właściwe równe $-\frac{2}{e}$.
8. Szereg jest zbieżny bezwzględnie.

Grupa C

1. $\delta_V \approx \pi \cdot 0.015$.
2. $|U| = \frac{52\pi}{3}$.
3. $R = 1$, $[-3, -1)$.
4. $z - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}(x - 1) - \frac{1}{4}\left(y - \sqrt{3}\right)$.
5. $I_y = \frac{Ma^2}{12}$.
6. $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y-1}} f(x, y)\, dx$.
7. W punkcie $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ funkcja f ma minimum lokalne równe $-\frac{1}{2e}$.
8. $(x_C, y_C, z_C) = \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

Grupa D

1. $\int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{-1}^{y+1} f(x, y)\, dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1}^{-\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x, y)\, dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-(y-1)^2}}^{1} f(x, y)\, dx$.
2. $M = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - r^4\right)$.
3. Szereg rozbieżny.
4. $x = y = z = 4$
5. $\frac{5}{9}$.
6. $I_z = \frac{32}{3}\pi$.
7. W punkcie $x_0 = 9\sqrt[3]{2}$ maksimum lokalne właściwe równe $9\sqrt[3]{4}$.
8. $\frac{1.02^4}{\sqrt[3]{7.99}} \approx 0.5402$.

Zestaw III

Grupa A

1. $\frac{\pi}{6}$.

2. $-4 \leqslant x < 2$, w punkcie $x = -4$ szereg jest zbieżny warunkowo, a w punkcie $x = 2$ szereg jest rozbieżny.
3. $\delta_P \approx 65$.
4. Wartość największa 1 osiągnięta jest w punktach $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, a wartość najmniejsza -1 w punktach $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
5. Funkcja f jest ciągła w punktach $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \neq 0\}$.
6. Wykres funkcji $y = y(x)$ jest prostą, gdyż mamy $x^2 + y^2 + 4xy = 0 \Longleftrightarrow \left[\left(2 + \sqrt{3}\right) x + y\right] \cdot \left[\left(2 - \sqrt{3}\right) x + y\right] = 0$.
7. $(x_C, y_C) = \left(\frac{4}{3\pi}, 1\right)$.
8. $I_z = \frac{64}{135}$.

Grupa B

1. $|D| = \int\limits_{\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx < \infty$.
2. $\frac{1}{10 + x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{9^{n+2}} (x+1)^n$, $-10 < x < 8$.
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{u \to 0+} \sin \frac{1}{u}$, gdzie $u = x^2 + y^2$, nie istnieje.
4. Mamy cztery takie punkty: $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$.
5. $\frac{\delta_V}{V} \leqslant \frac{1}{6.4}$.
6. $y - \frac{1}{e} = \left(\frac{2}{e} + \frac{1}{e^3}\right)(x - 1)$.
7. $|\Sigma| = 2\pi$
8. $(x_C, y_C, z_C) = \frac{3}{4}(1, 1, 1)$.

Grupa C

1. $|D| = \int\limits_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x + 2)^n = \frac{x + 2}{(x + 1)^2}$, $-3 < x < -1$.
3. $\left(\sqrt{15} - \sqrt{99}\right)^2 \approx 36.9$.
4. $x = y = z = 2\sqrt{3}$.

5. Funkcja f jest ciągła w punktach $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \neq 0\}$.
6. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \frac{dF}{du}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - 2y \frac{dF}{du}$.
7. $I_x = \frac{\sqrt{3}}{32} a^4$.
8. $|U| = \frac{\pi}{2}$.

Grupa D

1. $|U| = \pi \int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-2x}\, dx = \frac{\pi}{4}$.
2. $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $-1 < x \leqslant 1$.
3. Niech $(x_n', y_n') = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $(x_n'', y_n'') = \left(0, \frac{1}{n}\right)$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 0^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0^2} = 1 \neq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}{0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = -1$, co przeczy istnieniu granicy w punkcie $(0, 0)$.
4. $x = y = z = 40$, $xyz = 40^3$.
5. $\delta_c \approx \frac{11}{130}$
6. $16 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.
7. $I_x = 24\frac{3}{8}$.
8. π.

Zestaw V

Grupa A

1. Zbieżna, co wynika np. z kryterium ilorazowego.
2. $R = 2$, $[-5, -1)$.
3. $2x - y - 2z + 1 = 0$.
4. $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ lub $\vec{v} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.
5. Funkcja f ma minimum w punkcie $(4, 2)$, które jest równe 6.
6. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{2-2y} f(x, y)\, dx$.
7. $|\Sigma| = 4\pi$.
8. $M = \frac{9}{2}$.

Grupa B

1. Zbieżna bezwzględnie, a więc również zbieżna.
2. $\frac{x}{x^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}$, $|x| < 2$.
3. $\Delta_P \approx \frac{29}{250}\pi$.
4. $\frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(x^2-y^2\right)\cdot 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 1 + f'\left(x^2-y^2\right)\cdot(-2y)$.
5. Funkcja $y = y(x)$ ma minimum lokalne w punkcie $x_1 = -3$ równe -2 oraz maksimum lokalne w punkcie $x_2 = -1$ równe 0.
6. 18.
7. $M = \frac{10\sqrt{2}}{9}$.
8. $|U| = \frac{3}{35}$.

Grupa C

1. Rozbieżna, co wynika np. z kryterium ilorazowego.
2. $R = 1$, $[0,2]$.
3. $\sqrt[1.993]{7.97} \approx 2.0775$.
4. $y - \frac{1}{e} = \frac{e^2+1}{e^3}(x-1)$.
5. $a = b = c = 3$.
6. $|D| = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.
7. $\sqrt{2}-1$.
8. $I_x = \frac{M}{12}\left(3R^2+4M^2\right)$.

Grupa D

1. $|D| = \frac{3\pi^2}{32}$.
2. $\ln\frac{3}{2}$.
3. $\frac{6}{5\pi}$.
4. $\left(y^2-x^2\right)\frac{\partial f}{\partial u}\left(xy, x^2+y^2\right)$.
5. Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą równą -28 w punktach $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$, $\left(-2, -2\sqrt{3}\right)$ oraz wartość największą równą 80 w punkcie $(4,0)$.
6. $|U| = \frac{16}{21}$.

7. $I_y = \frac{16}{5}\pi$.
8. $\frac{\pi}{10}$.

Zestaw VII

Grupa A

1. $q = 5$.
2. Szereg rozbieżny.
3. Funkcja ma maksimum lokalne równe 2 w punkcie $(-1,1)$ oraz minimum lokalne równe -2 w punkcie $(1,1)$.
4. $R = 10$, $[-10, 10)$.
5. $2\sqrt{5}$.
6. $|U| = \frac{45}{32}\pi$.
7. $I_z = \frac{1}{4}\pi R^4$.
8. $(x_C, y_C, z_C) = \left(0, 0, \frac{6}{5}\right)$.

Grupa B

1. $|D| = 9$.
2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$.
3. Funkcja f przyjmuje wartość najmniejszą równą $\frac{4}{3}$ w punkcie $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ oraz wartość największą równą 3 w punktach $(1,0)$ i $(0,1)$.
4. $y'(x) = \frac{x+y(x)}{x-y(x)}$, $y''(x) = 2\frac{x^2+y^2(x)}{(x-y(x))^3}$.
5. $x \in (0,1) \cup (2,3)$, $S(x) = \frac{1}{x^2-3x}$.
6. $MS_x = \frac{\pi}{4}$, $MS_y = \pi$.
7. $M = \frac{\pi R^3}{3}$.
8. $\frac{16}{3}\pi$.

Grupa C

1. Całka zbieżna.
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, w punkcie $(0,0)$ pochodne nie są ciągłe.

3. Funkcja $y = y(x)$ ma minimum lokalne właściwe równe -2 w punkcie $x_1 = -3$ oraz maksimum lokalne właściwe równe 0 w punkcie $x_2 = -1$.
4. Szereg zbieżny.
5. $(x_1, y_1) = \left(\frac{7}{4}, -\frac{4}{3}\right)$ lub $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{3}\right)$.
6. $|U| = \frac{38}{15} + \frac{36\sqrt{3}}{5}$.
7. $MS_x = \frac{512}{3}\pi$.
8. $(x_C, y_C, z_C) = \left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$.

Grupa D

1. $|D| = 2\pi$.
2. Niech $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $(x''_n, y''_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0 \cdot \frac{1}{n} + 0^2} =$

   $1 \neq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}^2\right) + \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2}$, co przeczy istnieniu granicy w punkcie $(0,0)$.
3. Szereg jest zbieżny.
4. Funkcja f ma wartość najmniejszą równa $-\frac{1}{4}$ w punkcie $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ oraz wartość największą równą 3 w punkcie $(-1, 0)$.
5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$.
6. $\frac{1}{2}\pi R^2$.
7. $\frac{9}{4}$.
8. $(x_C, y_C) = \left(1, -\frac{4}{3\pi}\right)$.

Zestaw IX

Grupa A

1. $I_y = \frac{MR^2}{4}$.
2. $\Delta V \approx 0$.
3. $a = b = c = 2\,\text{cm}$.
4. $\frac{8}{27}$.
5. $|V| = 8\pi$.
6. Szereg zbieżny.

7. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-(1-y)^2}}^{\sqrt{1-(1-y)^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx$.
8. $(9 + 8\ln 2)\frac{12}{13} - (9\ln 3 + 12)\frac{5}{13}$.

Grupa B

1. Szereg zbieżny.
2. $\frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cdot 0.08$.
3. $R = 1$, $(0, 2)$.
4. Funkcja ma minimum lokalne równe $-2e^{-2}$ w punkcie $(-1, 0)$.
5. $|U| = \frac{4\pi}{3}\left(8 - \sqrt{27}\right)$.
6. $|\Sigma| = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5}\right)$.
7. $M = 2p \cdot \frac{R^3 - r^3}{3}$.
8. $(x_C, y_C) = \left(0, \frac{h}{3}\right)$.

Grupa C

1. $I_z = \frac{MD^2}{8}$.
2. Szereg zbieżny.
3. $\Delta_S \approx 7.6\,\text{km}$.
4. $\ln\frac{3}{2}$.
5. $a = b = c = 2\,\text{cm}$.
6. $\frac{13}{90}$.
7. $|U| = 40\pi$.
8. $\int\limits_{-4}^0 dy \int\limits_{-2-y}^{2} f(x,y)\,dx + \int\limits_0^4 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\,dx$.

Grupa D

1. $z = \frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.
2. $\Delta_M \approx 134\,[\text{g}]$.
3. Szereg zbieżny.

4. $\frac{4}{3}\pi R^3$.

5. $$\int\limits_1^2 dy \int\limits_{1-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{1+\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)\,dx.$$

6. $R=1$, $[-3,-1)$.

7. Funkcja ma minimum lokalne równe -27 w punkcie $(3,3)$.

8. $I_z = \frac{96}{5}M$.

Egzamin na ocenę celującą

Zestaw I

1. Szereg jest rozbieżny. Wskazówka. Wykorzystać tożsamość
$$\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right) = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1} - 2\pi n\right).$$
Otrzymany szereg porównać (kryterium ilorazowe) z szeregiem
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$
który jest rozbieżny.

2. Granica równa jest
$$M = \max\left\{f(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 1\right\}.$$
Wskazówka. Wykorzystać fakt, że dla dowolnej liczby dodatniej ε zachodzą nierówności
$$M-\varepsilon \leqslant f(x,y) \leqslant M$$
dla każdego (x,y) z pewnego otoczenia punktu (x_0,y_0), w którym $f(x_0,y_0)=M$.

3. $f(x,y) = \sqrt{\sin(\pi x)} + \sqrt{\sin(\pi y)}$.

4. $d=\sqrt{2}$.

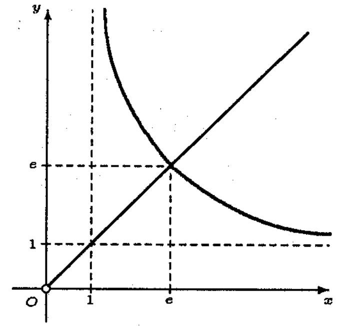
Zestaw II

1. Szereg jest zbieżny. Wskazówka. Zastosować kryterium ilorazowe do porównania z szeregiem
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2},$$
który jest zbieżny.

2. $\pi f(0,0)$. Wskazówka. Wykorzystać definicję Cauchy'ego ciągłości funkcji f w punkcie $(0,0)$ oraz twierdzenie o oszacowaniu całki podwójnej.

3. $R=b$. Wskazówka. Wystarczy rozważyć elipsy, które są przekrojami elipsoidy i płaszczyzn przechodzących przez początek układu współrzędnych.

4.



Zestaw III

1. Spodek wysokości powinien pokrywać się ze środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

2. $13e$. Wskazówka. W rozwinięciu $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ podstawić $x=t^2$. Następnie dwukrotnie obie strony tożsamości pomnożyć przez t i zastosować twierdzenie o różniczkowaniu szeregów potęgowych. Na końcu przyjąć $t=1$.

3. Wskazówka. Aby naczynie nie przewróciło się, prosta pionowa przeprowadzona przez środek masy powinna przechodzić przez podstawę walca. Do wyznaczenia położenia środka masy zastosować współrzędne walcowe.

4. Wskazówka. Zauważyć, że $f(0,0)=1>0$ oraz $f(-1,1)=-1<0$. Z ciągłości funkcji f wynika, że w pewnym otoczeniu punktu $(0,0)$ wartości funkcji f są dodatnie. Zatem
$$f\left(x_1',y_1'\right)+f\left(x_2',y_2'\right)+\ldots+f\left(x_8',y_8'\right)>0$$
dla punktów $\left(x_1',y_1'\right), \left(x_2',y_2'\right),\ldots,\left(x_8',y_8'\right)$ z tego otoczenia, które są wierzchołkami ośmiokąta foremnego. Podobnie
$$f\left(x_1'',y_1''\right)+f\left(x_2'',y_2''\right)+\ldots+f\left(x_8'',y_8''\right)<0$$
dla punktów $\left(x_1'',y_1''\right), \left(x_2'',y_2''\right),\ldots,\left(x_8'',y_8''\right)$ z pewnego otoczenia punktu $(-1,1)$, które są wierzchołkami ośmiokąta foremnego przystającego do poprzedniego. Teraz wykorzystać twierdzenie Darboux o miejscach zerowych funkcji.

Zestaw IV

1. $\frac{5-6\ln 2}{8}$. Wskazówka. Wykorzystać rozkład
$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{n-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{n+1}$$
oraz twierdzenie o całkowaniu szeregów potęgowych.

2. W rozważanej całce dokonać zamiany zmiennych $u = \frac{1}{x}$. Wykorzystać także równości
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^p)(1+x^2)} + \int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{(1+x^p)(1+x^2)} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$
3. Wskazówka. Jeżeli $f \equiv 0$, to stwierdzenie jest oczywiste. Jeżeli $f \not\equiv 0$, to z warunku
$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1} f(x,y,z)\,dxdydz = 0$$
wynika, że $f(x_1,y_1,z_1) < 0$ oraz $f(x_2,y_2,z_2) > 0$ w pewnych punktach kuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$. Wykorzystać teraz wskazówkę do zadania 4. z zestawu III.
4. Wszystkie momenty bezwładności sześcianu są jednakowe.

Zestaw V

1. $|V| = \frac{\pi h^3}{6}$. Wskazówka. Zastosować współrzędne walcowe albo wzór na objętość bryły obrotowej.
2. $\frac{\pi}{4}$. Wskazówka. Dokonać podstawienia $u = \frac{\pi}{2} - x$. Wtedy
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}\,dx}{1+(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{2}}}.$$
3. Szereg jest rozbieżny. Wskazówka. Podstawić $a_k = x_k - (k-1)\pi$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Następnie uzasadnić nierówność $0 < \operatorname{arcctg} k\pi < a_k$. Na końcu pokazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} k\pi$ jest rozbieżny.
4. Wskazówka. Pokazać najpierw tezę twierdzenia dla sfery. Następnie wykorzystać fakt, że każdą elipsoidę można otrzymać przez złożenie jednokładności sfery wzdłuż osi układu oraz fakt, że styczność prostej do powierzchni zachowuje się przy jednokładności.

Zestaw VI

1. Wskazówka. Najpierw znaleźć trójkąt o największym polu wpisany w koło. Następnie zauważyć, że każdą elipsę można uzyskać jako rzut koła na pewną płaszczyznę. Jest nieskończenie wiele rozwiązań.
2. Szereg jest rozbieżny. Wskazówka. Uzasadnić najpierw, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$ jest rozbieżny dla $a > 1$.
3. Wskazówka. Zauważyć, że płaszczyzny $x = y$, $y = z$, $x = z$ dzielą bryłę na trzy przystające części. Do obliczenia ich objętości zastosować współrzędne sferyczne.
4. Granica nie istnieje. Wskazówka. Rozważyć ciągi $x_n' = 0$, $y_n' = \frac{1}{n}$ oraz $x_n'' = \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n}$, $y_n'' = \frac{1}{n^6} - \frac{1}{n}$.

Zestaw VII

1. $y(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sh} x + \frac{1}{2}\cos x$. Wskazówka. Niech $y(x)$ będzie poszukiwaną funkcją (obszarem zbieżności szeregu potęgowego, czyli dziedziną tej funkcji jest $\mathbb{R}$). Następnie korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu szeregów potęgowych obliczyć $y^{(4)}(x)$ i zauważyć, że $y^{(4)}(x) = y(x)$. Funkcja $y(x)$ spełnia ponadto warunki $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$.
2. Szereg jest zbieżny. Wskazówka. Niech a_n będzie dowolnym wyrazem ciągu złożonym z k cyfr nieparzystych. Wtedy zachodzi nierówność
$$a_n \geqslant \underbrace{11\ldots1}_{k \text{ jedynek}} > 10^{k-1}.$$
Z drugiej strony ciąg (a_n) ma 5^k wyrazów k-cyfrowych. Zatem suma odwrotności tych wyrazów spełnia nierówność
$$\sum \frac{1}{a_n} < \frac{5^k}{10^{k-1}} = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$
Teraz wystarczy zauważyć, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ jest zbieżny.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$. Wskazówka. Najpierw uzasadnić zbieżność całki $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$ (zastosować kryterium ilorazowe do całki $\int_0^1 \ln x\,dx$, która jest zbieżna). Następnie w całce $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$ dokonać podstawienia $u = \frac{\pi}{2} - x$. W ten sposób otrzymamy pierwszą równość. Potem wykorzystać tożsamość $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.
4. Wskazówka. Równość z zadania zapisać w postaci
$$\int_{x_0}^{x} du \int_{y_0}^{y} f(u,v)\,dv = (x-x_0)(y-y_0).$$
Następnie obliczyć pochodne cząstkowe po x i po y obu stron tożsamości.

Zestaw VIII

1. $\int_0^\infty \frac{\ln^{1999} x}{1+x^2}dx = 0$. Wskazówka. Uzasadnić najpierw, że badana całka niewłaściwa jest zbieżna, gdyż zbieżne są całki $\int_0^1 \frac{\ln^{1999} x}{1+x^2}dx$, $\int_1^\infty \frac{\ln^{1999} x}{1+x^2}dx$. Następnie pod-

stawić $v = \frac{1}{x}$. Wówczas otrzymamy

$$\int_0^\infty \frac{\ln^{1999} x}{1+x^2} dx = -\int_0^\infty \frac{\ln^{1999} x}{1+x^2} dx.$$

2. Szereg $\sum_{n=1}^\infty (\pi - S_n)$ jest zbieżny. Wskazówka. Wyznaczyć najpierw $S_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$. Następnie korzystając z kryterium ilorazowego (porównać z szeregiem $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$) uzasadnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=3}^\infty \left(\pi - \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right).$$

3. $\int_0^7 y^2(x)\,dx = \frac{31}{2}$. Wskazówka. Z twierdzenia o pochodnej funkcji uwikłanej wynika, że dla $x \geqslant 0$ mamy $y' = -\frac{y}{3y^2+x}$. Ponadto $y(0) = 2$ oraz $y(7) = 1$. Dokonując zamiany zmiennych $x = x(y)$ w całce otrzymamy

$$\int_0^7 y^2(x)\,dx = \int_2^1 y^2(x)x'(y)\,dy = \int_2^1 \frac{y^2}{y'(x)}\,dy$$
$$= -\int_2^1 \frac{3y^2+x}{y}\cdot y^2\,dy = \int_1^2 \left(3y^3+xy\right)\,dy = \int_1^2 \left(8+2y^3\right)\,dy = \frac{31}{2}.$$

4. $|V| = 8\left(2-\sqrt{2}\right)$. Wskazówka. Zastosować współrzędne walcowe.

Zestaw IX

1. Całka $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2-\sqrt[3]{x}}$ jest rozbieżna. Wskazówka. Problem polega na zbadaniu zbieżności całek:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2-\sqrt[3]{x}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^5}-1\right)} \quad \text{– całka zbieżna,}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^2-\sqrt[3]{x}} \boxed{\begin{array}{l} x = t^3 \\ dx = 3t^2dt \end{array}} = 3\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}^1 \frac{t\,dt}{t^5-1} \quad \text{– całka rozbieżna do } -\infty,$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2-\sqrt[3]{x}} \quad \text{– całka rozbieżna do } \infty \text{ (uzasadnienie jak powyżej),}$$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-\sqrt[3]{x}} = \int_2^\infty \frac{dx}{x^2\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}\right)} \quad \text{– całka zbieżna.}$$

2. Wskazówka. Kryterium całkowe zbieżności szeregów zastosować do szeregu

$$\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n\right).$$

3. $\sum_{n=0}^\infty \left(x^{16n} + x^{16n+1}\right)$ dla $|x| < 1$. Wskazówka. Zauważyć, że

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)} = \frac{1-x}{1-x^{16}} = \frac{1}{1-x^{16}} - \frac{x}{1-x^{16}}.$$

Następnie zastosować wzór

$$\sum_{n=0}^\infty q^n = \frac{1}{1-q}$$

dla $|q| < 1$. Otrzymamy wówczas

$$\frac{1}{1-x^{16}} = \sum_{n=0}^\infty x^{16n} \quad \text{oraz} \quad \frac{x}{1-x^{16}} = \sum_{n=0}^\infty x^{16n+1}$$

dla $|x| < 1$.

4. Siła przyciagania $\vec{F}$ jest skierowana prostopadle do płytki i ma wartość $\frac{\pi m M}{6a^2}$.

Zestaw X

1. Zdanie jest fałszywe. Wskazówka. Rozważyć szereg $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{\ln n}$. Do uzasadnienia rozbieżności szeregu $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(\ln n)^k}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, wykorzystać kryterium całkowe lub kondensacyjne.

2. $f^{(2000)}(0) = \frac{2000!}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{501}}\right)$. Wskazówka. Funkcję wymierną $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$ rozłożyć na ułamki proste. Następnie wykorzystać wzór $\sum_{n=0}^\infty q^n = \frac{1}{1-q}$ dla $|q| < 1$. Na końcu zastosować równość $f^{(n)}(0) = c_n n!$, gdzie c_n oznacza współczynnik stojący przy x^n w szeregu Maclaurina funkcji f.

3. $f(x,y) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Możliwe są także inne funkcje. Wskazówka. Uzasadnić, że funkcja

$$h(r) = \begin{cases} 1 & \text{dla } r < 1, \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2}r\right) & \text{dla } 1 \leqslant r \leqslant 2, \\ 0 & \text{dla } 2 < r \end{cases}$$

spełnia warunki $h'(1) = 0$ oraz $h'(2) = 0$.

4. $|V| = 75$. Wskazówka. Zastosować współrzędne sferyczne. Bryła składa się z przystających części położonych w 4 oktantach układu współrzędnych.

Zestaw XI

1. $\ln 2$, $\frac{1}{2}\ln 2$. Wskazówka. Jeżeli przez S oznaczyć sumę szeregu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots,$$

to mamy

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{S}{2}.$$

2. Wskazówka. Zauważyć, że

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1-x}{1-x^4}$$

oraz wykorzystać tożsamość $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ dla $|q| < 1$.

3. $\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\left(y - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\right)\left(z - \frac{\pi}{3}\right)$. Wskazówka. Równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $F(x,y,z) = 0$ ma postać

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0,$$

gdzie (x_0,y_0,z_0) jest punktem tej powierzchni.

4. Wskazówka. Środek masy jednorodnego trójkata jest punktem przecięcia środkowych. Wykorzystać wzór na wektor wodzący środka masy sumy obszarów rozłącznych A, B :

$$\vec{r}_{A\cup B} = \frac{\vec{r}_A \cdot m_A + \vec{r}_B \cdot m_B}{m_A + m_B},$$

gdzie m_A i m_B oznaczają odpowiednio masy obszarów A, B. Przyjąć, że otwory mają „masę ujemną".

Zestaw XII

1. Szereg jest rozbieżny. Wskazówka. Zauważyć najpierw, że $0 < a_n < \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Następnie do zbadania zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(a_n)^{2000}}{n}$$

wykorzystać kryterium ilorazowe (porównać z szeregiem $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, który jest rozbieżny).

2. Wskazówka. W całce $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ dokonać zamiany zmiennych $v = \frac{1}{x}$. Wówczas otrzymamy równość

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{\infty} \frac{v^2\,dv}{1+v^4}.$$

Następnie wykorzystać tożsamość

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

3. Jest to trójkąt równoboczny opisany na kole. Wskazówka. Jako zmienne badanej funkcji (pole trójkąta) przyjąć „kąty widzenia" boków ze środka koła. Zamiast warunku wystarczającego ekstremum można zastosować twierdzenie Weierstrassa o przyjmowaniu kresów przez funkcję ciągłą na zbiorze domkniętym i ograniczonym w $\mathbb{R}^2$.

4. $I_l = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)MR^2$. Wskazówka. Wykorzystać wzór

$$d(P,l) = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-y-z)^2 + (2y-x-z)^2 + (2z-x-y)^2}$$

na odległość punktu $P = (x,y,z)$ od prostej $l:\ x = y = x$, a w całce potrójnej na moment bezwładności wprowadzić współrzędne sferyczne.

Zestaw XIII

1. Całka niewłaściwa jest zbieżna. Wskazówka. Wykorzystać nierówność $0 \leqslant e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ dla $x \geqslant 1$.

2. Wskazówka. Zauważyć, że z nierówności $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ wynika nierówność $0 \leqslant x_n - a_n \leqslant b_n - a_n$. Wykorzystać teraz fakt, że ze zbieżności szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$ i następnie zastosować kryterium porównawcze zbieżności szeregów do uzyskania zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - a_n)$.

Zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ wynika teraz ze zbieżności szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n - a_n)$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Największe pole ma trójkąt równoboczny wpisany w koło. Wskazówka. Pole trójkąta wyraża się wzorem

$$S(\alpha,\beta) = \frac{R^2}{2}\left\{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\left[2\pi - (\alpha+\beta)\right]\right\},$$

gdzie α, β oraz $2\pi - (\alpha+\beta)$ są kątami między promieniami koła dochodzącymi do wierzchołków tego trójkata.

4. $|V| = \frac{\pi}{16}$. Wspólna część tych powierzchni jest krzywą płaską. Wskazówka. Wykorzystać fakt, że rzutem bryły na płaszczyznę xOy jest koło. Zastosować współrzędne walcowe.

Zestaw XIV

1. Wskazówka. Założyć, że w pewnym punkcie (x_0, y_0) zachodzi nierówność

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) > \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0).$$

Wówczas z twierdzenia o lokalnym zachowaniu znaku funkcji ciągłej wynika, że dla punktów (x,y) z pewnego prostokąta P o środku w (x_0,y_0) zachodzi nierówność

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) > \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y).$$

Nastepnie zastosować twierdzenie o całce iterowanej do prostokąta P i funkcji $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

2. Całka jest rozbieżna. Wskazówka. Założyć, że całka $\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ jest zbieżna.

Wówczas, dokonując podstawienia $x = \frac{\pi}{2}+t$, uzasadnić zbieżność całki $\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{\cos^2 x}{x}\,dx$.

Na końcu wykorzystać tożsamość

$$\frac{1}{x} = \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\cos^2 x}{x}.$$

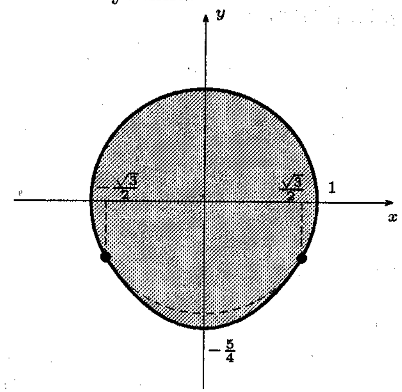
3. Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie Darboux o miejscach zerowych funkcji ciągłej. Rozważyć funkcję $f(\varphi) = I_x(\varphi) - I_y(\varphi)$, gdzie $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ jest kątem, jaki tworzy dodatnia część osi Ox z ustalonym kierunkiem, a I_x, I_y oznaczają momenty bezwładności obszaru względem osi Ox i Oy. Porównać wartości $f(\varphi)$ i $f\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Istnieje. Takim szeregiem jest np.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{2}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots.$$

Zestaw XV

1. Kształt cienia bryły pokazano na rysunku.



W półpłaszczyźnie $y \leqslant 0$ brzeg cienia ma równanie

$$y = \begin{cases} x^2 - \frac{5}{4} & \text{dla} \quad |x| < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{dla} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant |x| \leqslant 1, \end{cases}$$

a w półpłaszczyźnie $y \geqslant 0$ równanie $y = \sqrt{1-x^2}$ dla $|x| \leqslant 1$.

Wskazówka. Rozważyć przekrój bryły płaszczyzną $x = x_0$ i zbadać bieg promienia światła w tej płaszczyźnie.

2. Szereg jest zbieżny.

Wskazówka. Zauważyć, że dla $n \geqslant 4$ prawdziwe są nierówności

$$0 \leqslant \frac{(3+1)(3+3)(3+5)\ldots(3+(2n-1))}{(7+2)(7+4)(7+6)\ldots(7+2n)} \leqslant \frac{(3+2)(3+4)(3+6)\ldots(3+2n)}{(7+2)(7+4)(7+6)\ldots(7+2n)} = \frac{5\cdot 7}{(2n+5)(2n+7)} \leqslant \frac{35}{4n^2}.$$

Następnie zastosować kryterium porównawcze zbieżności szeregów.

3. $I_z = \frac{M}{4}\left(4R^2 + 3r^2\right)$.

Wskazówka. Moment bezwładności torusa wyraża się wzorem

$$I_z = \frac{2M}{|V|}\iint\limits_P \left(x^2+y^2\right)\sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2}\,dxdy,$$

gdzie P jest pierścieniem opisanym nierównościami $(R-r)^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant (R+r)^2$, a $|V|$ oznacza objętość torusa, którą można wyznaczyć ze wzoru

$$|V| = 2\iint\limits_P \sqrt{r^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2}\,dxdy.$$

Do obliczenia całek podwójnych wykorzystać współrzędne biegunowe.

4. Całka jest rozbieżna.
Wskazówka. Zastosować kryterium ilorazowe rozbieżności całek niewłaściwych do porównania funkcji podcałkowej z funkcją $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Egzamin poprawkowy

Zestaw I

Grupa A

1. 0.48.
2. $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\operatorname{arctg} 2}{2}$.
3. Szereg zbieżny.
4. $z_0 = -\dfrac{1}{3}$.
5. $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.
6. $x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\dfrac{2x^2}{1-2x^2}$.
7. $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$.
8. $|D| = \dfrac{32}{3}\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Grupa B

1. 2.
2. $4\pi R^2$.
3. Funkcja ma maksimum lokalne równe $\dfrac{64}{27}$ w punkcie $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$.
4. 2.999.
5. $y''(0) = -2$.
6. $\cos 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.
7. $7\sqrt{2}$.
8. π.

Grupa C

1. Całka rozbieżna.
2. $|U| = 2\pi$.

3. Funkcja ma minimum lokalne równe $-2e^{-\frac{3}{2}}$ w punkcie $\left(-\dfrac{3}{2}, 1\right)$.
4. 4.
5. $y = -x = 2$.
6. $-\ln|x+2|$, $x \in [-4,-2)$.
7. $\displaystyle\int_{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x,y)dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.
8. $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ lub $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Grupa D

1. Całka zbieżna.
2. $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$.
3. Funkcja przyjmuje najmniejszą wartość równą 0 w punkcie $(0,0)$, natomiast wartość największa równa 8 jest realizowana w punkcie $(2,2)$.
4. $257\dfrac{41}{375}$.
5. $y = -x + 2$.
6. $\dfrac{-1}{(1-x^2)}$, $x \in (0,2)$.
7. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
8. $\dfrac{\pi}{3}R^2 H$.

Zestaw III

Grupa A

1. $\dfrac{\pi}{8}$.
2. $R = 2$, $[-1,3]$.
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2(n+1)}$, $R = 1$.
4. 5.082.
5. $y = -3x + 3$.
6. Funkcja ma minimum lokalne równe -9 w punkcie $(0,3)$.
7. $I_x = \dfrac{2000}{3}$.
8. $(x_C, y_C, z_C) = \left(0, 0, \dfrac{2}{5}\right)$.

Grupa B

1. 6.
2. $R = 1$, $(-3, -1]$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+2}}{n!}$, $R = \infty$.
4. $8,29$.
5. $y = x$.
6. Funkcja ma minimum lokalne równe -4 w punkcie $(1, -1)$.
7. $I_x = \frac{5000}{3}$.
8. $(x_C, y_C, z_C) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Grupa C

1. -1.
2. $R = \frac{1}{2}$, $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} x^{2n+2}$, $R = \infty$.
4. 2.95.
5. $y = ex + 1$.
6. Funkcja ma minimum lokalne równe -4 w punkcie $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.
7. $MS_x = \frac{2}{3}$.
8. $(x_C, y_C, z_C) = \left(0, 0, \frac{3}{4}\right)$.

Grupa D

1. e^{-1}.
2. $R = 3$, $[-3, 3)$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16^{n+1}} x^{4n+1}$, $R = 2$.
4. 4.24.
5. $y = -x + 1$.
6. Funkcja ma minimum lokalne równe -9 w punkcie $(0, 3)$.
7. $MS_x = 0$.
8. $(x_C, y_C, z_C) = \left(0, 0, \frac{2}{3}\right)$.

Zestaw V

Grupa A

1. $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{135} - \frac{\pi}{300}$.
2. Funkcja ma maksimum lokalne równe $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ w punkcie $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ oraz minimum lokalne równe $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ w punkcie $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$.
3. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < -x,\ x < 0\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x < y < 0,\ x > 0\right\}$.
4. $\frac{4x - 2x^2}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$.
5. $|D| = \frac{\pi}{16}$.
6. $M = \frac{3e^4 + 1}{4} - \frac{106}{5}$.
7. $f_{\text{śr}} = -\frac{1}{10}$.
8. $\frac{\pi^2}{4}$.

Grupa B

1. $\frac{\pi}{6}$.
2. $3x - \frac{1}{2}y + z = \frac{\pi}{4} - 5$.
3. Funkcja ma wartość najmniejszą równą -4 w punktach $(0, 2)$ i $(0, -2)$ oraz wartość największą równą 4 w punktach $(2, 0)$ i $(-2, 0)$.
4. $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{u^2} - \frac{v}{(u-1)^2}$.
5. $p = 4$.
6. $\frac{1}{3}$.
7. $|\Sigma| = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{3}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$.
8. $|x| \geqslant 3$.

Grupa C

1. $a \geqslant 5$.
2. $f_{\text{śr}} = 2\ln 2 - 1$.
3. $\frac{1}{12}$.
4. $M = \frac{4}{3}$.

5. $\frac{2\pi}{3}\left(1+\sqrt{3}\right)(x-1)+\left(1+\sqrt{3}\right)\left(y-\frac{\pi}{3}\right)=z-\sqrt{3}$.
6. Funkcja uwikłana $y=y(x)$ ma minimum lokalne równe 0 w punkcie 2 oraz minimum lokalne równe $2\sqrt{3}$ w punkcie $2\sqrt{3}+2$ oraz maksimum lokalne równe $-2\sqrt{3}$ w punkcie $-2\sqrt{3}+2$.
7. $|D|=8$.
8. $D_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>0,\ y\leqslant x^3\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x<0,\ y\geqslant x^3\right\}$, poziomica $y=x^3-4x$.

Grupa D

1. $\frac{5}{6}+\ln\sqrt{2}$.
2. $M=\frac{112}{15}\pi\sqrt{2}$.
3. $|D|=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.
4. $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x=-2, z\neq 0\right\}$.
5. Funkcja ma minimum lokalne równe $-\frac{1}{e}$ w punkcie $(1,0)$.
6. $R=\frac{e^2}{2}$.
7. Szereg zbieżny.
8. $\frac{17\ln 3-1}{150}$.

Zestaw VII

Grupa A

1. $\frac{8}{15}\pi R^5$.
2. $\frac{12}{5}$.
3. $40\frac{1}{5}$.
4. $\frac{1}{4}x^2y\,(y+2)$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n}$.
6. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^2}{1+(xy^2)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2xy}{1+(xy^2)^2}$.
7. Funkcja ma minimum lokalne równe 0 w punkcie $\left(-\frac{7}{5},\frac{1}{5}\right)$.
8. $(x_C,y_C)=\left(\frac{5}{12},\frac{5}{9}\right)$.

Grupa B

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^4}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx$.
2. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{z}{1+yz},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-z^2x}{(1+yz)^2},\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{-x}{(1+yz)^2}$.
3. $\frac{\pi}{3}$.
4. $[-5,1)$.
5. $I_y=\frac{3}{35}$.
6. $z=32x+6y-53$.
7. $-\frac{2}{3}$.
8. $f(x,y)=7+(x+2)^2+(y-3)^2$.

Grupa C

1. $-\frac{1}{2}$.
2. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx$.
3. Funkcja ma wartość najmniejszą równą -8 w punkcie $(2,4)$ oraz wartość największą równą -1 w punkcie $(1,1)$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{(2n)!}$.
5. $\frac{3}{10}$.
6. $I_x=\frac{3}{13}$.
7. $\frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{3}x+y\right)$.
8. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right),\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

Grupa D

1. $\frac{1}{2e}$.
2. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x}+y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=x$.
3. 0.

4. $54 + 24\sqrt{3}$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!}$.
6. $f(x,y) = 5 - (x-2)^2 - (y+1)^2$.
7. $I_O = -\frac{8}{105}$.
8.

Zestaw IX

Grupa A

1. $R = 1$, $(1, 3]$.
2. $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$.
3. Funkcja ma minimum lokalne równe $45\frac{1}{4}$ w punkcie $\left(\frac{21}{2}, 5\right)$.
4. 6.775.
5. $\int_{-1}^{1} dy \int_{-2}^{1} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{3} dy \int_{-2}^{1-y} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{2} dy \int_{y-1}^{1} f(x,y)\,dx$.
6. $M = \frac{\pi}{2} H R^4$.
7. $55\frac{5}{6}$.
8. Szereg zbieżny.

Grupa B

1. Funkcja ma minimum lokalne równe $-294\frac{1}{4}$ w punkcie $\left(5, \frac{21}{2}\right)$.
2. $M = \frac{\pi r^4}{4}$
3. $\int_{-2}^{0} dy \int_{-1}^{3} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{2\sqrt{2}} dy \int_{-1}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{2\sqrt{2}}^{3} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx$.
4. Szereg zbieżny.
5. $z = 0$.
6. 0.031.
7. -4.
8. 36π.

Grupa C

1. $\frac{7}{30} - \frac{\sqrt[3]{12}}{9}$.
2. $\frac{4}{3}$.
3. $R = 2$, $(-4, 0)$.
4. $|U| = 80\pi$.
5. Szereg rozbieżny.
6. $\Delta_U \approx 1,93$.
7. $\int_{-5}^{-1} dy \int_{\sqrt{-y-1}}^{2} f(x,y)\,dx + \int_{-2}^{-1} dy \int_{-1}^{-\sqrt{-y-1}} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{2} f(x,y)\,dx$.
8. Funkcja ma maksimum lokalne równe -220 w punkcie $\left(-\frac{17}{2}, 5\right)$.

Grupa D

1. $|U| = 24\pi$.
2. Funkcja ma minimum lokalne równe $3 - 2\ln 2$ w punkcie $(1, 2)$.
3. $\Delta_P \approx 5.21$.
4. $R = 4$, $(-2, 6)$.
5. $\int_{-3}^{0} dy \int_{-1}^{2} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{2} dy \int_{-1}^{-\frac{1}{2}y} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{4} dx \int_{\frac{1}{2}y}^{2} f(x,y)\,dx$.
6. $M = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2$.
7. Szereg zbieżny.
8. $z = 4x + 4\sqrt{\pi}y + 1 - 2\pi$.