

M

**MATEMATYKA DLA STUDENTÓW
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ**

Marian Gewert
Zbigniew Skoczylas

**ANALIZA
MATEMATYCZNA 2**

Definicje, twierdzenia, wzory

Informujemy, że seria wydawnicza

MATEMATYKA DLA STUDENTÓW POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

składa się ze skryptów:



- Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory.
- Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania.
- Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy.

- Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory.
- Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania.
- Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Kolokwia i egzaminy.

- Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory.
- Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania.
- Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy.

- Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Definicje, twierdzenia, wzory.
- Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Przykłady i zadania.
- Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Kolokwia i egzaminy.

- Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Elementy analizy wektorowej. Teoria, przykłady, zadania.

- Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania.

- Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Matematyka elementarna. Teoria, przykłady, zadania.

Skrypty tej serii można kupić w księgarni „POLITECHNIKA” (wyb. Wyspiańskiego 27, bud. A-1) oraz w księgarni „TECH” (pl. Grunwaldzki 13, bud D-1).



ISBN 83-85941-48-7

**ANALIZA
MATEMATYCZNA 2**

Marian Gewert Zbigniew Skoczyła

**ANALIZA
MATEMATYCZNA 2**

Definicje, twierdzenia, wzory

Wydanie siódme poprawione

Oficyna Wydawnicza **GiS**
Wrocław 1999

Marian Gewert, Instytut Matematyki, Politechnika Wroclawska
Zbigniew Skoczylas, Instytut Matematyki, Politechnika Wroclawska

Copyright © 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999 by
Oficyna Wydawnicza **GiS**

All rights reserved. No part of this book may be translated or reproduced in any form without written permission from the copyright owner.

Printed in Poland

Skład skryptu wykonano w systemie \LaTeX .

ISBN 83-85941-48-7

Wydanie VII poprawione, Wrocław 1999
Oficyna Wydawnicza **GiS**, s.c.
Druk: TINTA Sp.z o.o.

Spis treści

Wstęp	7
1 Całki niewłaściwe	9
1.1 Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju	9
1.2 Kryteria zbieżności całek niewłaściwych pierwszego rodzaju	12
1.3 Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pierwszego rodzaju	14
1.4 Całki niewłaściwe drugiego rodzaju	15
1.5 Kryteria zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju	18
1.6 Przykłady z geometrii i fizyki prowadzące do całek niewłaściwych	20
2 Szeregi liczbowe i potęgowe	21
2.1 Definicje i podstawowe twierdzenia	21
2.2 Kryteria zbieżności szeregów	23
2.3 Zbieżność bezwzględna szeregów	26
2.4 Szeregi potęgowe	28
3 Funkcje dwóch i trzech zmiennych	34
3.1 Zbiory na płaszczyźnie i w przestrzeni	34
3.2 Funkcje dwóch i trzech zmiennych	39
3.3 Granice funkcji w punkcie	43
3.4 Funkcje ciągłe	46
4 Rachunek różniczkowy funkcji dwóch i trzech zmiennych	48
4.1 Pochodne cząstkowe funkcji	48
4.2 Różniczka funkcji	52
4.3 Pochodne cząstkowe funkcji złożonych	56
4.4 Pochodna kierunkowa funkcji	57
4.5 Wzór Taylora. Ekstrema funkcji	59
4.6 Zastosowania ekstremów funkcji w geometrii, fizyce i technice	64
4.7 Funkcje uwikłane	64

5	Całki podwójne	68
5.1	Całki podwójne po prostokącie	68
5.2	Całki podwójne po obszarach normalnych	71
5.3	Zamiana zmiennych w całkach podwójnych	76
5.4	Zastosowania całek podwójnych	78
6	Całki potrójne	85
6.1	Całki potrójne po prostopadłościanie	85
6.2	Całki potrójne po obszarach normalnych	88
6.3	Zamiana zmiennych w całkach potrójnych	91
6.4	Zastosowania całek potrójnych	96
	Literatura	101

Wstęp

Skrypt jest przeznaczony dla słuchaczy kursów **Analiza matematyczna 2** oraz **Analiza matematyczna 2 i elementy analizy wektorowej** prowadzonych w Politechnice Wrocławskiej. Ze skryptu mogą korzystać również studenci studiów zaocznych. Skrypt został opracowany w ten sposób, aby mógł służyć jako konspekt wykładów. Opracowanie obejmuje całki niewłaściwe, szeregi liczbowe i potęgowe, rachunek różniczkowy i całkowy funkcji wielu zmiennych wraz z ich zastosowaniami w fizyce i technice. Wszystkie pojęcia oraz twierdzenia przedstawione w skrypcie kończą się ćwiczeniami. Rozwiązania tych ćwiczeń będą prezentowane na wykładach. Fragmenty materiału oznaczone gwiazdką nieznacznie wykraczają poza aktualnie obowiązujące programy kursów. Zagadnienia te dodano z myślą o studentach pragnących pogłębić swoje wiadomości z analizy matematycznej. Studentów tych zachęcamy do studiowania także innych podręczników z analizy matematycznej. Tytuły tych książek podajemy na końcu skryptu.

Standardowe listy zadań do wymienionych wyżej kursów umieszczone są w skrypcie „*Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*”. Skrypt ten zawiera przykładowe zadania z pełnymi rozwiązaniami oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnego rozwiązania. Zadania z tego skryptu powinny być przerabiane przez studentów równoległe do materiału omawianego na wykładzie.

Obecne siódme wydanie skryptu nieznacznie różni się od poprzedniego. Uzupełniono w nim niektóre definicje oraz uściślono sformułowania kilku twierdzeń. Ponadto poprawiono zauważone błędy i usterki.

Autorzy dziękują Paniom dr T.Jurlewicz i dr J.Sulkowskiej oraz Panom dr. hab. J.Mierczyńskiemu, dr. K.Bogdanowi, dr. T.Inglotowi, dr. M.Wilhelmowi z Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej za uwagi i sugestie o poprzednim wydaniu skryptu.

Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

1

Całki niewłaściwe

W całym rozdziale przyjmujemy, że wszystkie funkcje są lokalnie całkowane, tzn. są całkowalne na dowolnym domkniętym przedziale zawartym w ich dziedzinie.

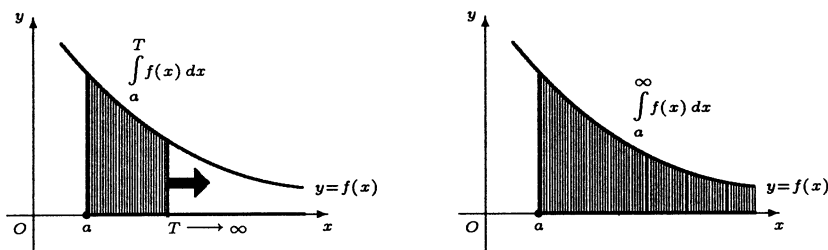
1.1 Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

● **Definicja 1.1.1** (całka niewłaściwa na półprostej)

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $[a, \infty)$. Całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju funkcji f na $[a, \infty)$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx.$$

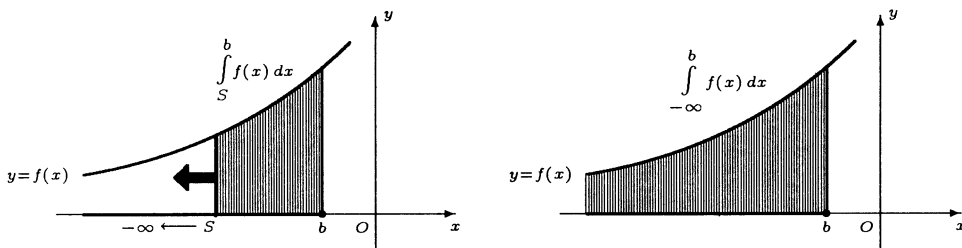
Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka niewłaściwa pierwszego rodzaju funkcji f na $[a, \infty)$ jest zbieżna. Jeżeli granica ta jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka jest rozbieżna.



Rys. 1.1.1. Ilustracja do definicji całki niewłaściwej na półprostej $[a, \infty)$.

Analogicznie definiuje się całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju na $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \stackrel{def}{=} \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^b f(x) dx.$$



Rys. 1.1.2. Ilustracja do definicji całki niewłaściwej na półprostej $(-\infty, b]$.

Uwaga. Przy obliczaniu wartości całek niewłaściwych zamiast granic

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} [F(x)]_a^T, \quad \lim_{S \rightarrow -\infty} \int_S^b f(x) dx = \lim_{S \rightarrow -\infty} [F(x)]_S^b$$

będziemy pisali krótko $[F(x)]_a^\infty$, $[F(x)]_{-\infty}^b$, gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f .

● Ćwiczenie 1.1.2

Korzystając z definicji zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych (dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości):

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_2^\infty \frac{dx}{x^2}; & \text{b) } \int_4^{-9} \frac{dx}{\sqrt{x}}; & \text{c) } \int_1^0 \frac{dx}{x^2+1}; \\ \text{d) } \int_\pi^\infty \sin x dx; & \text{e) } \int_{-\infty}^{-9} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}; & \text{f) } \int_{-\infty}^0 x e^x dx. \end{array}$$

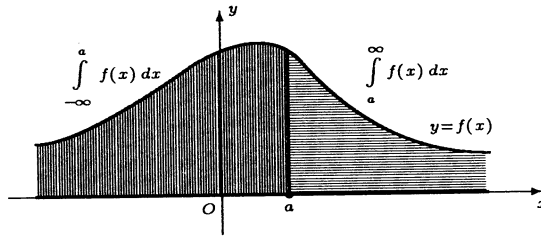
● Definicja 1.1.3 (całka niewłaściwa na prostej)

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $(-\infty, \infty)$. Całkę niewłaściwą pierwszego rodzaju funkcji f na $(-\infty, \infty)$ definiujemy wzorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx,$$

gdzie a oznacza dowolną liczbę rzeczywistą. Jeżeli obie całki po prawej stronie znaku równości są zbieżne, to mówimy, że całka niewłaściwa pierwszego rodzaju funkcji f na $(-\infty, \infty)$ jest zbieżna. Jeżeli jedna z tych całek jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞ , a druga jest zbieżna albo rozbieżna odpowiednio do $-\infty$ lub ∞ , to mówimy, że całka jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞ . W pozostałych przypadkach mówimy, że całka ta jest rozbieżna.

Uwaga. Jeżeli całka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna dla pewnego $a \in \mathbf{R}$, to jest zbieżna dla każdego $a \in \mathbf{R}$ i jej wartość nie zależy od a .



Rys. 1.1.3. Ilustracja do definicji całki niewłaściwej na prostej $(-\infty, \infty)$.

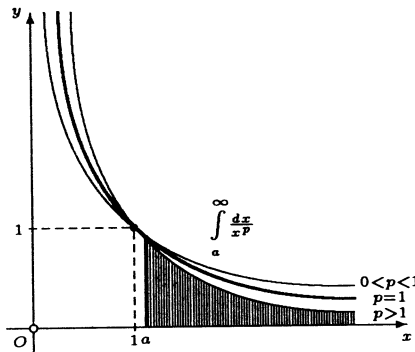
○ **Ćwiczenie 1.1.4**

Korzystając z definicji zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych (dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości):

- a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$;
- b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1}$;
- c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^{2x}}$;
- d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$;
- e) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$;
- f) $\int_{-\infty}^{\infty} e^x \sin x dx$.

● **Fakt 1.1.5** (o zbieżności całek postaci $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$)

Niech $a > 0$. Wtedy całka $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ jest $\begin{cases} \text{zbieżna} & \text{dla } p > 1, \\ \text{rozbieżna} & \text{dla } p \leq 1. \end{cases}$



Rys. 1.1.4. Wykresy funkcji $y = \frac{1}{x^p}$ dla różnych wartości parametru $p \in \mathbf{R}$.

Uwaga. Analogiczny fakt jest prawdziwy także dla całek $\int_{-\infty}^b \frac{dx}{x^p}$, gdzie $b < 0$, o ile funkcja podcałkowa jest poprawnie określona.

○ **Ćwiczenie 1.1.6**

Korzystając z powyższego faktu zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych:

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$; b) $\int_8^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$; c) $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$; d) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(\sqrt[3]{2x+5})^4}$.

1.2 Kryteria zbieżności całek niewłaściwych pierwszego rodzaju

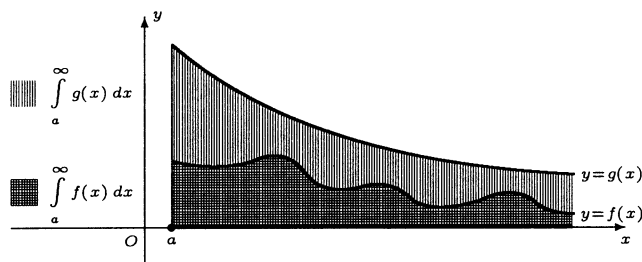
● **Twierdzenie 1.2.1** (*kryterium porównawcze zbieżności całek*)

Jeżeli

- $0 \leq f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in [a, \infty)$,
- całka $\int_a^{\infty} g(x) dx$ jest zbieżna, (całka $\int_a^{\infty} f(x) dx$ jest rozbieżna),

to całka $\int_a^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna (całka $\int_a^{\infty} g(x) dx$ jest rozbieżna).

Uwaga. Twierdzenie powyższe pozostanie prawdziwe, gdy nierówności w założeniu 1. są prawdziwe dla każdego $x \in [a^*, \infty)$, gdzie $a^* > a$. Twierdzenie to jest prawdziwe także dla funkcji niedodatnich f i g . Ponadto prawdziwe są analogiczne twierdzenia dla całek niewłaściwych postaci $\int_{-\infty}^b f(x) dx$.



Rys. 1.2.1. Ilustracja do kryterium porównawczego zbieżności całek niewłaściwych.

○ **Ćwiczenie 1.2.2**

Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych:

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}$;

b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + x}$;

c) $\int_4^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x + 1}$;

d) $\int_{-\infty}^0 \frac{\arctg x^2 dx}{x^2 + 1}$;

e) $\int_{2\pi}^{\infty} \frac{2 + \sin x}{\sqrt{x}} dx$;

f*) $\int_{-\infty}^1 e^{-x^2} dx$.

● **Twierdzenie 1.2.3** (kryterium ilorazowe zbieżności całek)

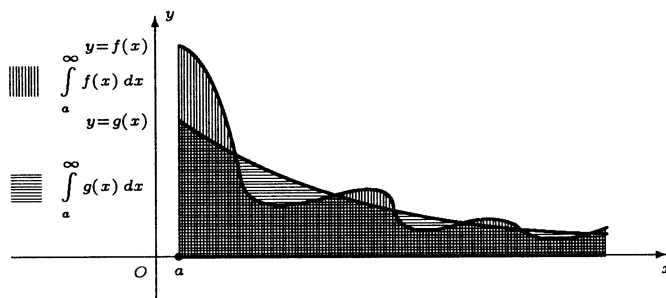
Niech funkcje f i g będą określone i dodatnie na półprostej $[a, \infty)$ oraz niech

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \text{ gdzie } 0 < k < \infty. \text{ Wówczas}$$

$$\text{całka } \int_a^{\infty} f(x) dx \text{ jest zbieżna} \iff \text{całka } \int_a^{\infty} g(x) dx \text{ jest zbieżna.}$$

Uwaga. Twierdzenie to prawdziwe jest także dla funkcji ujemnych f i g . Ponadto

prawdziwe są analogiczne twierdzenia dla całek niewłaściwych postaci $\int_{-\infty}^b f(x) dx$.



Rys. 1.2.2. Ilustracja do kryterium ilorazowego zbieżności całek niewłaściwych (przypadek $k = 1$).

○ **Ćwiczenie 1.2.4**

Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych:

a) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 1}}$;

b) $\int_3^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^6 - 10x}}$;

c) $\int_1^{\infty} \frac{e^x dx}{x(e^x - 1)}$;

d) $\int_{-\infty}^{-\pi} \frac{x dx}{x^3 + \sin x}$;

e) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - x}}$;

f*) $\int_1^{\infty} \frac{(x+1)^x dx}{x^{x+2}}$.

1.3 Zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pierwszego rodzaju

- **Definicja 1.3.1** (zbieżność bezwzględna całek niewłaściwych pierwszego rodzaju)
Całka niewłaściwa pierwszego rodzaju funkcji f jest zbieżna bezwzględnie, gdy całka niewłaściwa funkcji $|f|$ jest zbieżna.

○ Ćwiczenie 1.3.2

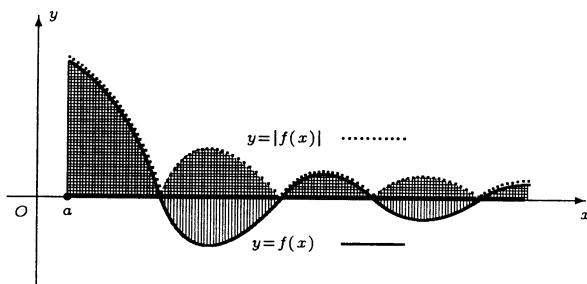
Zbadać zbieżność bezwzględną podanych całek niewłaściwych:

$$\text{a) } \int_1^{\infty} \frac{\sin 2x \, dx}{x^2 + 1}; \quad \text{b) } \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx; \quad \text{c) } \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^3}; \quad \text{d*) } \int_{10}^{\infty} \frac{(-1)^{E(x)} \, dx}{x}.$$

- **Twierdzenie 1.3.3** (o zbieżności całek niewłaściwych zbieżnych bezwzględnie)
Jeżeli całka niewłaściwa jest zbieżna bezwzględnie, to jest zbieżna. Ponadto

$$\left| \int_a^{\infty} f(x) \, dx \right| \leq \int_a^{\infty} |f(x)| \, dx.$$

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla pozostałych rodzajów całek niewłaściwych pierwszego rodzaju. *Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe dla dowolnej funkcji, np. całka niewłaściwa z funkcji $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ na przedziale $[1, \infty)$ jest zbieżna, ale nie jest zbieżna bezwzględnie.



Rys. 1.3.1. Ilustracja do twierdzenia o zbieżności całek niewłaściwych zbieżnych bezwzględnie.

○ Ćwiczenie 1.3.4

Zbadać zbieżność i zbieżność bezwzględną podanych całek niewłaściwych:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^{\infty} x \sin x \, dx; & \text{b) } \int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{e^x + 1} \, dx; & \text{c) } \int_2^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 4)^2} \, dx; \\ \text{d*) } \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx; & \text{e) } \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x} \sin x}{2 + \cos x} \, dx; & \text{f) } \int_1^{\infty} \frac{\sin x + \cos x}{(x^2 + 9)^2} \, dx. \end{array}$$

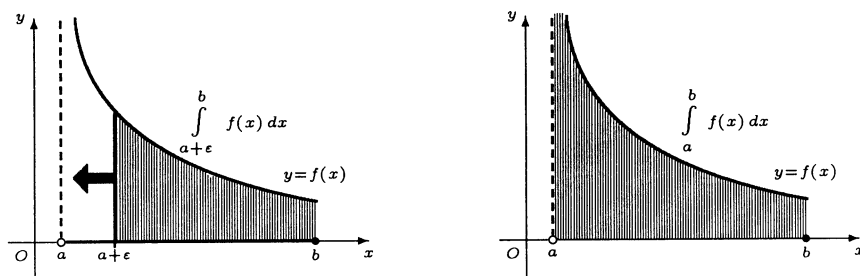
1.4 Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

• Definicja 1.4.1 (całki niewłaściwe drugiego rodzaju)

Niech funkcja f określona na przedziale $(a, b]$ będzie nieograniczona na prawostronnym sąsiedztwie punktu a . Całkę niewłaściwą drugiego rodzaju funkcji f na $(a, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

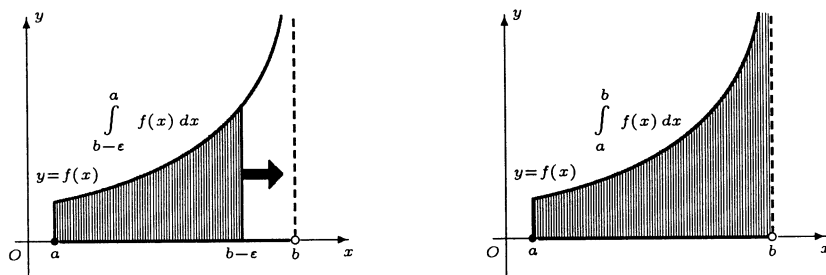
Jeżeli granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa, to mówimy, że całka niewłaściwa drugiego rodzaju funkcji f na przedziale $(a, b]$ jest zbieżna. Jeżeli granica ta jest równa ∞ lub $-\infty$, to mówimy, że całka jest rozbieżna odpowiednio do ∞ lub $-\infty$. W pozostałych przypadkach mówimy, że całka ta jest rozbieżna.



Rys. 1.4.1. Ilustracja do definicji całki niewłaściwej drugiego rodzaju na $(a, b]$.

Analogicznie definiuje się całkę niewłaściwą drugiego rodzaju funkcji f określonej na przedziale $[a, b)$ i nieograniczonej na lewostronnym sąsiedztwie punktu b :

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$



Rys. 1.4.2. Ilustracja do definicji całki niewłaściwej drugiego rodzaju na $[a, b)$.

Uwaga. Przy obliczaniu wartości całek niewłaściwych drugiego rodzaju zamiast granic

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [F(x)]_{a+\varepsilon}^b, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [F(x)]_a^{b-\varepsilon}$$

będziemy pisali krótko $[F(x)]_{a+}^b$, $[F(x)]_a^{b-}$, gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f . *Jeżeli funkcja f jest określona i ograniczona na przedziale $(a, b]$

to całka $\int_a^b f(x) dx$ obliczona według powyższej definicji jest zbieżna. Podobnie jest dla funkcji określonej na przedziale $[a, b)$.

○ Ćwiczenie 1.4.2

Korzystając z definicji zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych (dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości):

a) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

b) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^2}$;

c) $\int_0^e \ln x dx$;

d) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

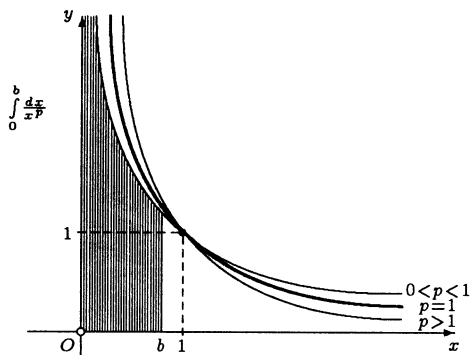
e) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$;

f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$.

● Fakt 1.4.3 (o zbieżności całek postaci $\int_0^b \frac{dx}{x^p}$)

Niech $b > 0$. Wtedy całka $\int_0^b \frac{dx}{x^p}$ jest $\begin{cases} \text{zbieżna} & \text{dla } p < 1, \\ \text{rozbieżna} & \text{dla } p \geq 1. \end{cases}$

Analogiczny fakt jest prawdziwy także dla całek $\int_a^0 \frac{dx}{x^p}$, gdzie $a < 0$, o ile funkcja podcałkowa jest poprawnie określona.



Rys. 1.4.3. Wykresy funkcji $y = \frac{1}{x^p}$ w prawostronnym otoczeniu O dla różnych wartości parametru $p \in \mathbf{R}$.

○ **Ćwiczenie 1.4.4**

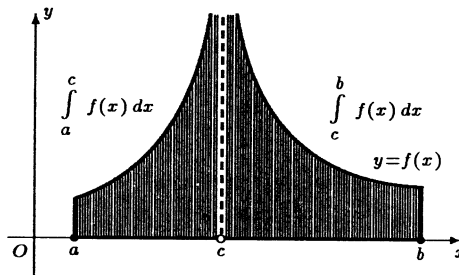
Korzystając z powyższego faktu zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^4}$; b) $\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt[5]{x+3}}$; c) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-1)^4}}$.

● **Definicja 1.4.5** (całki niewłaściwe drugiego rodzaju, ciąg dalszy)

Niech funkcja f określona na zbiorze $[a, c) \cup (c, b]$ będzie nieograniczona na obustronnych sąsiedztwach punktu c . Całkę niewłaściwą drugiego rodzaju funkcji f na $[a, b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{def}{=} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$



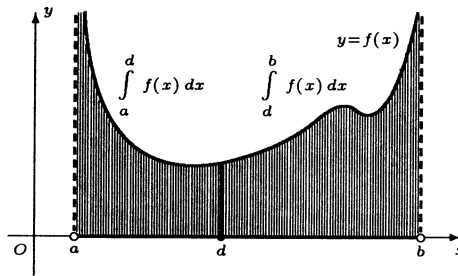
Rys. 1.4.4. Ilustracja do definicji całki niewłaściwej drugiego rodzaju z funkcji nieograniczonej na obu jednostronnych sąsiedztwach punktu.

Jeżeli obie całki po prawej stronie znaku równości są zbieżne, to mówimy, że całka niewłaściwa drugiego rodzaju funkcji f na przedziale $[a, b]$ jest zbieżna. Jeżeli jedna z tych całek jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞ , a druga jest zbieżna albo rozbieżna odpowiednio do $-\infty$ lub ∞ , to mówimy, że całka jest rozbieżna do $-\infty$ lub ∞ . W pozostałych przypadkach mówimy, że całka ta jest rozbieżna.

Uwaga. W podobny sposób określa się całki niewłaściwe z funkcji nieograniczonych na sąsiedztwach punktów $c_1, c_2, \dots, c_n \in [a, b]$. Na przykład dla funkcji f określonej na przedziale (a, b) i nieograniczonej na prawostronnym sąsiedztwie punktu a i na lewostronnym sąsiedztwie punktu b przyjmujemy:

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{def}{=} \int_a^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx,$$

gdzie d jest dowolnym punktem przedziału (a, b) . Jeżeli całka $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna dla pewnego d , to jest zbieżna dla każdego $d \in (a, b)$ i jej wartość nie zależy od d .



Rys. 1.4.5. Ilustracja do definicji całki niewłaściwej drugiego rodzaju z funkcji nieograniczonej na sąsiedztwach obu końców przedziału.

○ Ćwiczenie 1.4.6

Korzystając z definicji zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych (dla całek zbieżnych obliczyć ich wartości):

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2}; & \text{b) } \int_{-8}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; & \text{c) } \int_0^2 \frac{dx}{x(x-1)}; & \text{d) } \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^2 x}; \\ \text{e) } \int_{-1}^1 \frac{\arccos x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}; & \text{f*) } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}; & \text{g) } \int_{-\pi}^0 \frac{dx}{\cos x}; & \text{h) } \int_{-2}^2 \frac{x \, dx}{\sqrt[3]{4-x^2}}. \end{array}$$

1.5 Kryteria zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju

● Twierdzenie 1.5.1 (kryterium porównawcze)

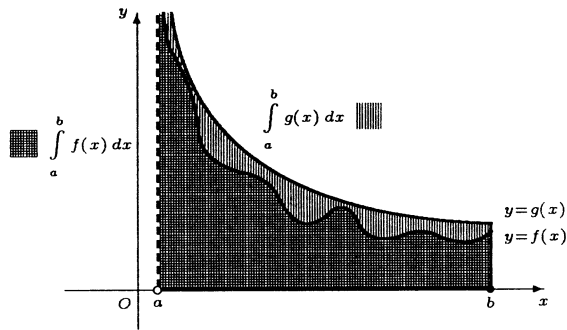
Jeżeli

- $0 \leq f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in (a, b]$,

- całka $\int_a^b g(x) \, dx$ jest zbieżna (całka $\int_a^b f(x) \, dx$ jest rozbieżna),

to całka $\int_a^b f(x) \, dx$ jest zbieżna (całka $\int_a^b g(x) \, dx$ jest rozbieżna).

Uwaga. Twierdzenie powyższe pozostanie prawdziwe, gdy nierówności w założeniu 1. są prawdziwe dla każdego $x \in (a, b^*]$, gdzie $a < b^* < b$. Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie dla funkcji określonych na przedziale $[a, b)$ i nieograniczonych na lewostronnym sąsiedztwie punktu b . Wszystkie warianty tego twierdzenia można stosować także dla funkcji niedodatnich.



Rys. 1.5.1. Ilustracja do kryterium porównawczego zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju.

○ **Ćwiczenie 1.5.2**

Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych:

a) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{x}}$; b) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sin^2 x} dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{2x-\pi}}$.

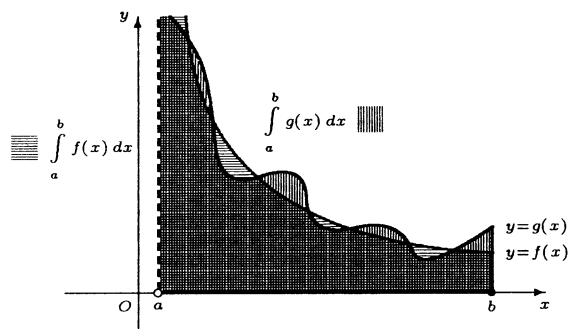
● **Twierdzenie 1.5.3 (kryterium ilorazowe zbieżności całek)**

Niech funkcje f i g będą określone i dodatnie na przedziale $(a, b]$ oraz niech

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, gdzie $0 < k < \infty$. Wówczas

całka $\int_a^b f(x) dx$ jest zbieżna \iff całka $\int_a^b g(x) dx$ jest zbieżna.

Uwaga. Twierdzenie to jest prawdziwe także dla funkcji f i g ujemnych. Prawdziwe są także analogiczne twierdzenia dla całek niewłaściwych na przedziale $[a, b)$.



Rys. 1.5.2. Ilustracja do kryterium ilorazowego zbieżności całek niewłaściwych drugiego rodzaju (przypadek $k = 1$).

○ **Ćwiczenie 1.5.4**

Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność podanych całek niewłaściwych:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_0^{\pi} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{x^3}}; & \text{b)} \int_0^8 \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x}}; & \text{c)} \int_{-1}^0 \frac{(e^x - 1) \, dx}{x^2}; \\ \text{d)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}; & \text{e*)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}; & \text{f)} \int_0^2 \frac{dx}{\ln(1+x)}. \end{array}$$

1.6 Przykłady z geometrii i fizyki prowadzące do całek niewłaściwych

○ **Ćwiczenie 1.6.1**

- Obliczyć objętość i pole powierzchni bocznej bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox obszaru ograniczonego prostymi $x = 1$, $y = 0$ i wykresem funkcji $y = \frac{1}{x}$.
- Obliczyć pracę, jaką należy wykonać, aby ciało o masie $m = 100$ kg przenieść z powierzchni Ziemi do nieskończoności. Zaniedbać opór powietrza. Przyjąć promień Ziemi $R = 6380$ km oraz przyspieszenie na poziomie morza $g_0 = 9,81$ m/sek².
- Obliczyć współrzędne środka masy jednorodnego obszaru ograniczonego prostymi $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ i wykresem funkcji $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.
- Obliczyć siłę, z jaką jednorodny nieskończony prostoliniowy pręt o gęstości λ_0 przyciąga masę m umieszczoną w odległości r od tego pręta.
- Obliczyć siłę, z jaką jednorodnie naładowana półprosta przyciąga ładunek $Q = 4$ C położony na przedłużeniu półprostej, w odległości $d = 1$ m od jej końca. Gęstość liniowa ładunku jest równa $\lambda_0 = 1$ C/m.

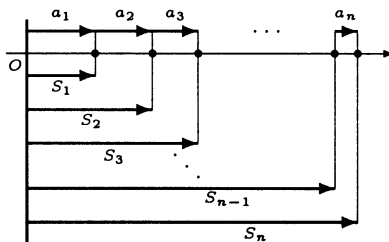
2

Szeregi liczbowe i potęgowe

2.1 Definicje i podstawowe twierdzenia

● **Definicja 2.1.1** (szereg, suma częściowa szeregu)

Niech (a_n) będzie ciągiem liczbowym. Szeregiem liczbowym nazywamy ciąg (S_n) , gdzie $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Szereg taki oznaczamy przez $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Liczbę a_n nazywamy n -tym wyrazem, a liczbę S_n n -tą sumą częściową tego szeregu.



Rys. 2.1.1. Ilustracja do definicji sum częściowych szeregu o wyrazach dodatnich.

○ **Ćwiczenie 2.1.2**

Obliczyć n -te sumy częściowe podanych szeregów:

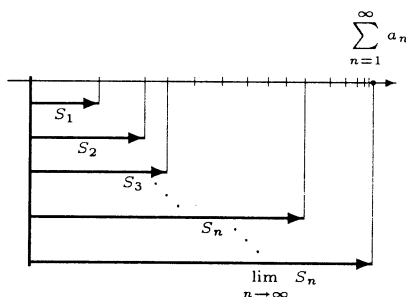
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{10^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n+1]{2} - \sqrt[n]{2})$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$.

● **Definicja 2.1.3** (szereg zbieżny i rozbieżny, suma szeregu)

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, jeżeli istnieje granica właściwa ciągu (S_n) .

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$ albo $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny odpowiednio do $-\infty$ albo do ∞ . W pozostałych przypadkach mówimy, że

szereg jest rozbieżny. Sumą szeregu zbieżnego nazywamy granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ i oznaczamy ją tym samym symbolem co szereg.



Rys. 2.1.2. Ilustracja do definicji szeregu zbieżnego oraz jego sumy.

Uwaga. Analogicznie definiuje się szereg $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, gdzie $n_0 \in \mathbf{Z}$, jego sumę częściową $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=n_0}^n a_k$ dla $n \geq n_0$ oraz sumę $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

○ Ćwiczenie 2.1.4

Korzystając z definicji zbadać zbieżność szeregów (dla szeregów zbieżnych podać ich sumy):

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right)$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$;
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$; e*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$; f*) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[(2n-1) \frac{\pi}{4} \right]$.

● Twierdzenie 2.1.5 (o zbieżności kombinacji liniowych szeregów)

Jeżeli szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne i c jest liczbą rzeczywistą, to:

- a) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ jest zbieżny oraz $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$;
b) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ jest zbieżny oraz $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

● Fakt 2.1.6 (o zbieżności szeregu geometrycznego)

Szereg geometryczny $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|x| < 1$.

Dla zbieżnego szeregu geometrycznego mamy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Uwaga. Przyjmujemy tutaj, że $0^0 \stackrel{def}{=} 1$.

○ **Ćwiczenie 2.1.7**

Korzystając z powyższego faktu zbadać zbieżność podanych szeregów (dla szeregów zbieżnych podać ich sumy):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} (0,999999)^n; & \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^{n+1}; & \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n+2}}; \\ \text{d)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right); & \text{e*)} \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{17} - \sqrt{2} - \sqrt{3})^n; & \text{f*)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^\pi}{\pi^e}\right)^n. \end{array}$$

○ **Ćwiczenie 2.1.8**

Wyznaczyć wszystkie wartości $x \in \mathbf{R}$, dla których podane szeregi są zbieżne. Obliczyć ich sumy:

$$\begin{array}{l} \text{a)} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots; \\ \text{b)} e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots; \\ \text{c)} \cos x - 2 \cos^2 x + 4 \cos^3 x - 8 \cos^4 x + \dots \end{array}$$

● **Twierdzenie 2.1.9** (*warunek konieczny zbieżności szeregu*)

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Uwaga. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Świadczy o tym przykład ciągu $a_n = \frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Mamy bowiem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny do ∞ . Powyższe twierdzenie zapisane w równoważnej postaci:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{ albo } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ nie istnieje} \implies \text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest rozbieżny,}$$

stosujemy do uzasadniania rozbieżności niektórych szeregów.

○ **Ćwiczenie 2.1.10**

Korzystając z powyższej uwagi uzasadnić, że podane szeregi są rozbieżne:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+100}; \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{100n^2+1}; \quad \text{c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}; \quad \text{d)} \sum_{n=2}^{\infty} n \sqrt{\frac{n}{1000}}.$$

2.2 Kryteria zbieżności szeregów

● **Twierdzenie 2.2.1** (*kryterium całkowite zbieżności szeregów*)

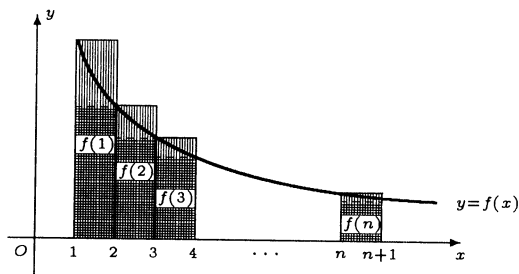
Niech funkcja $f : [n_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, gdzie $n_0 \in \mathbf{N}$, będzie nierosnąca. Wówczas

$$\text{szereg } \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \text{ jest zbieżny} \iff \text{całka niewłaściwa } \int_{n_0}^{\infty} f(x) dx \text{ jest zbieżna.}$$

Uwaga. Reszta tego szeregu, tj. wyrażenie $R_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=n}^{\infty} f(i)$, spełnia oszacowanie:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx.$$

Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie zbieżności dla funkcji nieododatniej i niemalejącej.



Rys. 2.2.1. Ilustracja do kryterium całkowego zbieżności szeregów (przypadek $n_0 = 1$).

○ Ćwiczenie 2.2.2

Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność podanych szeregów:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}; & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+9}; & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}; \\ \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2+1}; & \text{e)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}; & \text{f*)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}. \end{array}$$

● **Fakt 2.2.3** (o zbieżności szeregów postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$)

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest $\begin{cases} \text{zbieżny} & \text{dla } p > 1, \\ \text{rozbieżny} & \text{dla } p \leq 1. \end{cases}$

○ Ćwiczenie 2.2.4

Korzystając z powyższego faktu wskazać szeregi zbieżne:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}; & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{2}{3}}; & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}; \\ \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}; & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^e}}; & \text{f)} \sum_{n=11}^{\infty} (n-10)^{-\frac{1}{2}}. \end{array}$$

● **Twierdzenie 2.2.5** (kryterium porównawcze zbieżności szeregów)

Jeżeli

$$1. \quad 0 \leq a_n \leq b_n \text{ dla każdego } n \geq n_0$$

2. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny (szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny)

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny (szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny).

Uwaga. Podobne twierdzenie jest prawdziwe także dla szeregów o wyrazach nie-dodatnich.

○ Ćwiczenie 2.2.6

Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność podanych szeregów:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}; & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1}; & \text{c*)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}; \\ \text{d)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 - n}; & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2}; & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^3}. \end{array}$$

● Twierdzenie 2.2.7 (kryterium ilorazowe zbieżności szeregów)

Niech $a_n, b_n > 0$ dla każdego $n \geq n_0$ oraz niech $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, gdzie $0 < k < \infty$.

Wówczas

$$\text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny} \iff \text{szereg } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ jest zbieżny.}$$

Uwaga. Twierdzenie to jest prawdziwe także dla szeregów o wyrazach ujemnych.

○ Ćwiczenie 2.2.8

Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność podanych szeregów:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 - n^2 + 2}{n^5 - n^3 + 3}; & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}; & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}; \\ \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right); & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{n}; & \text{f*)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right). \end{array}$$

● Twierdzenie 2.2.9 (kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów)

1. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

2. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Uwaga. Jeżeli zamiast założenia podanego w punkcie 2. spełniony jest warunek

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ dla każdego $n \geq n_0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest nadal rozbieżny. Jeżeli

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, to kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest

zbieżny. Np. dla ciągów $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = 1$,
ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, natomiast szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

○ Ćwiczenie 2.2.10

Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność podanych szeregów:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}; & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}; & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(2n)!}; \\ \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}; & \text{e)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\pi^n}; & \text{f*)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}. \end{array}$$

● Twierdzenie 2.2.11 (kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów)

1. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

2. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Uwaga. Analogicznie jak kryterium d'Alamberta, również kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga zbieżności szeregu w przypadku, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$.

○ Ćwiczenie 2.2.12

Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność podanych szeregów:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n; & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}; & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{5} \right)^n; \\ \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{\pi^n}; & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^{n^2}; & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arccos \frac{1}{n} \right)^n. \end{array}$$

2.3 Zbieżność bezwzględna szeregów

● Twierdzenie 2.3.1 (Leibniza o zbieżności szeregu naprzemiennego)

Jeżeli

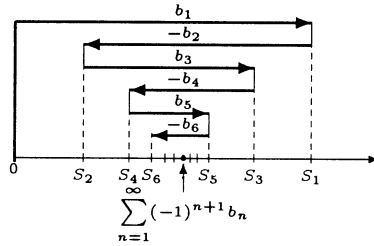
1. ciąg (b_n) jest nierosnący od numeru $n_0 \in \mathbf{N}$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$,

to szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ jest zbieżny.

Ponadto prawdziwe jest następujące oszacowanie:

$$|S - S_n| = \left| S - \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} b_i \right| \leq b_{n+1} \text{ dla każdego } n \geq n_0,$$

gdzie S oznacza sumę szeregu $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} b_i$.



Rys. 2.3.1. Ilustracja do twierdzenia Leibniza o zbieżności szeregu naprzemiennego ($n_0 = 1$).

○ **Ćwiczenie 2.3.2**

Korzystając z kryterium Leibniza uzasadnić zbieżność podanych szeregów:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+3}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n$; f*) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n - \ln n}$.

○ **Ćwiczenie 2.3.3**

Obliczyć sumy przybliżone podanych szeregów ze wskazaną dokładnością:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, $\delta = 0,1$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$, $\delta = 0,001$.

● **Definicja 2.3.4** (zbieżność bezwzględna szeregu)

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Uwaga. Kryteria d’Alemberta i Cauchy’ego zapewniające zbieżność szeregu gwarantują jednocześnie jego zbieżność bezwzględną.

○ **Ćwiczenie 2.3.5**

Zbadać zbieżność bezwzględną podanych szeregów:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-2n}{3n+2}\right)^n$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{4^n}$; f*) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n \ln \ln n}$.

● **Twierdzenie 2.3.6** (o zbieżności szeregów zbieżnych bezwzględnie)

Jeżeli szereg jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny.

Uwaga. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Świadczy o tym przykład szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, który jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie.

○ **Ćwiczenie 2.3.7**

Korzystając z powyższego twierdzenia uzasadnić, że podane szeregi są zbieżne:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^3+n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)}{n^2+1}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n}$; d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n \ln^2 n}$.

● **Definicja 2.3.8** (*szereg zbieżny warunkowo*)

Szereg zbieżny, który nie jest zbieżny bezwzględnie, nazywamy szeregiem zbieżnym warunkowo.

○ **Ćwiczenie 2.3.9**

Z badać zbieżność warunkową podanych szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$; c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$;
 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+1}$; e) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$.

● **Fakt* 2.3.10** (*sumy ważniejszych szeregów*)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

2.4 Szeregi potęgowe

● **Definicja 2.4.1** (*szereg potęgowy*)

Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $x_0 \in \mathbf{R}$ i współczynnikach $c_n \in \mathbf{R}$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$, nazywamy szereg postaci:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Uwaga. W tym paragrafie przyjmujemy, że $0^0 \stackrel{def}{=} 1$.

● **Definicja 2.4.2** (promień zbieżności szeregu potęgowego)

Promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ nazywamy liczbę R określoną równością:

$$R \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0, & \text{gdy } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty, \\ \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}, & \text{gdy } 0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty, \\ \infty, & \text{gdy } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0. \end{cases}$$

Uwaga. Promień zbieżności szeregu może być obliczany także ze wzorów:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|,$$

o ile granice w tych wzorach istnieją.

○ **Ćwiczenie 2.4.3**

Wyznaczyć środki, współczynniki oraz obliczyć promienie zbieżności podanych szeregów potęgowych:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)}; & \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}; & \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-3x)^n}{3^n+2^n}; & \text{d*)} \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^{3n}; \\ \text{e*)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; & \text{f)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}; & \text{g)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n (x+5)^n; & \text{h*)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} (x+1)^n. \end{array}$$

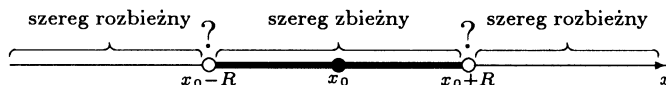
● **Twierdzenie 2.4.4** (Cauchy'ego–Hadamarda)

Niech $0 < R < \infty$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$.

Wtedy szereg ten jest:

- zbieżny bezwzględnie w każdym punkcie przedziału $(x_0 - R, x_0 + R)$;
- rozbieżny w każdym punkcie zbioru $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$.

Uwaga. Na końcach przedziału $(x_0 - R, x_0 + R)$ szereg potęgowy może być zbieżny lub rozbieżny. Jeżeli $R = 0$, to szereg potęgowy jest zbieżny jedynie w punkcie x_0 . Jeżeli $R = \infty$, to szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie na całej prostej.

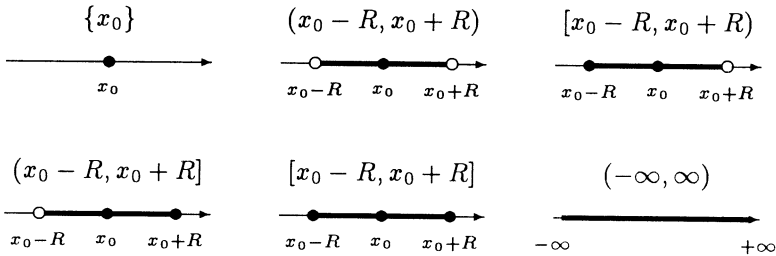


Rys. 2.4.1. Ilustracja do twierdzenia Cauchy'ego–Hadamarda.

● **Definicja 2.4.5** (przedział zbieżności szeregu potęgowego)

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ nazywamy zbiór:

$$\left\{ x \in \mathbf{R} : \text{szereg } \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \text{ jest zbieżny} \right\}:$$



Rys. 2.4.2. Postacie przedziałów zbieżności szeregów potęgowych.

○ Ćwiczenie 2.4.6

Znaleźć przedziały zbieżności podanych szeregów potęgowych:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-2)^n; & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n}; & \text{c*) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{4^{2n}}; \\ \text{d) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \ln^2 n}; & \text{e) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{2n+1}}{n^2+1}; & \text{f) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{array}$$

● Twierdzenie 2.4.7 (o rozwijaniu funkcji w szereg potęgowy)

Jeżeli

- funkcja f ma na otoczeniu $O(x_0, \delta)$, gdzie $\delta > 0$, pochodne dowolnego rzędu,
- dla każdego $x \in O(x_0, \delta)$ spełniony jest warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, gdzie

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n$$

oznacza n -tą resztę we wzorze Taylora dla funkcji f ,

to

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \text{ dla każdego } x \in O(x_0, \delta).$$

Uwaga. W założeniu 2. punkt c zależy od n i od x . Zamiast tego założenia można przyjąć, że:

$$\bigvee_{M>0} \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M \text{ dla każdego } n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \text{ oraz dla każdego } x \in O(x_0, \delta).$$

Szereg potęgowy występujący w tezie tego twierdzenia nazywamy szeregiem Taylora funkcji f w punkcie x_0 . Gdy $x_0 = 0$, to szereg ten nazywamy szeregiem Maclaurina.

○ Ćwiczenie 2.4.8

Pokazać, że dla każdego $x \in \mathbf{R}$ mamy:

$$\text{a) } e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots; \quad \text{b) } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

○ **Ćwiczenie 2.4.9**

Wyznaczyć szeregi Taylora dla podanych funkcji na otoczeniu punktu $x_0 = 1$:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$; b) $f(x) = (x+1)e^x$; c*) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; d) $f(x) = \frac{x}{2^x}$.

● **Twierdzenie 2.4.10** (o jednoznaczności rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy)

Jeżeli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ dla każdego $x \in O(x_0, \delta)$, gdzie $\delta > 0$, to

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

○ **Ćwiczenie 2.4.11**

Dla podanych funkcji obliczyć wskazane pochodne:

a) $f(x) = \frac{1}{8+x^3}$, $f^{(18)}(0)$; b) $f(x) = e^{-3x^2}$, $f^{(31)}(0)$;

c*) $f(x) = e^{-x} \sin x$, $f^{(100)}(0)$; d*) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$, $f^{(20)}(-1)$.

● **Fakt 2.4.12** (szeregi Maclaurina niektórych funkcji elementarnych)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \text{ dla } |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \text{ dla } x \in \mathbf{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ dla } x \in \mathbf{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ dla } x \in \mathbf{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \text{ dla } -1 < x \leq 1$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \text{ dla } -1 < x \leq 1$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \text{ dla } x \in \mathbf{R}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \text{ dla } x \in \mathbf{R}$$

○ **Ćwiczenie 2.4.13**

Wykorzystując rozwinięcia Maclaurina funkcji e^x , $\sin x$, $\cos x$ oraz $\frac{1}{1-x}$ wyznaczyć szeregi Maclaurina podanych funkcji. Określić promienie zbieżności otrzymanych szeregów:

a) e^{-2x} ; b) $\frac{1}{2+3x}$; c) $\frac{1}{(x+2)(x-1)}$; d) $\sin^2 x$; e) $\cos x^2$; f*) $\operatorname{sh}^2 x$.

○ **Ćwiczenie 2.4.14**

Wykorzystując rozwinięcia w szereg Maclaurina funkcji podanych w **Fakcie 2.4.12** obliczyć sumy podanych szeregów liczbowych:

a) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$; b) $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{2^5 \cdot 5!} - \frac{\pi^7}{2^7 \cdot 7!} + \dots$;

c) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$; d*) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

● **Twierdzenie 2.4.15** (o różniczkowaniu szeregu potęgowego)

Niech $0 < R \leq \infty$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Wtedy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{dla każdego } x \in (-R, R).$$

Uwaga. Na przedziale $(-R, R)$ suma szeregu potęgowego ma ciągłe pochodne dowolnego rzędu. Podobny wzór jest prawdziwy także dla szeregu potęgowego postaci $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$.

○ **Ćwiczenie 2.4.16**

Różniczkując odpowiednie szeregi Maclaurina sprawdzić, że:

a) $(e^x)' = e^x$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$;

b) $(\sin x)' = \cos x$ dla każdego $x \in \mathbf{R}$;

c) $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$ dla każdego $|x| < 1$.

○ **Ćwiczenie 2.4.17**

Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu szeregu potęgowego pokazać, że:

$$\frac{1}{(1+x)^3} = 1 - 3x + \frac{3 \cdot 4}{2!} x^2 - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3!} x^3 + \dots \quad \text{dla każdego } x \in (-1, 1).$$

● **Twierdzenie 2.4.18** (o całkowaniu szeregu potęgowego)

Niech $0 < R \leq \infty$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Wtedy

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} \quad \text{dla każdego } x \in (-R, R).$$

Uwaga. Podobny wzór jest prawdziwy także dla szeregu potęgowego postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

○ **Ćwiczenie 2.4.19**

Korzystając z twierdzenia o całkowaniu szeregów potęgowych pokazać, że:

a) $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ dla każdego $x \in (-1, 1)$;

b) $\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

○ **Ćwiczenie 2.4.20**

Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów pokazać, że:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ dla każdego $|x| < 1$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ dla każdego $|x| < 1$.

○ **Ćwiczenie 2.4.21**

Korzystając z twierdzeń o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych obliczyć sumy podanych szeregów:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{3^n}$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n5^n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$;

e*) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$;

f*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{-n}}{n(n+1)}$.

● **Fakt* 2.4.22** (sumy ważniejszych szeregów potęgowych)

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$
$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x)$
$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

Uwaga*. Wszystkie podane wyżej wzory są prawdziwe dla każdego $x \in (-1, 1)$. Jedyne w drugim wzorze z logarytmem, przyjmując $x = 0$ należy zastosować przejście graniczne $x \rightarrow 0$ po prawej stronie równości.

3

Funkcje dwóch i trzech zmiennych

3.1 Zbiory na płaszczyźnie i w przestrzeni

● **Definicja 3.1.1** (*płaszczyzna, przestrzeń*)

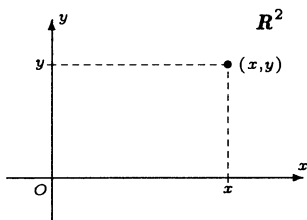
Przestrzenią dwuwymiarową (płaszczyzną) nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (x, y) , gdzie $x, y \in \mathbf{R}$. Przestrzeń tę oznaczamy przez \mathbf{R}^2 ;

$$\mathbf{R}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}.$$

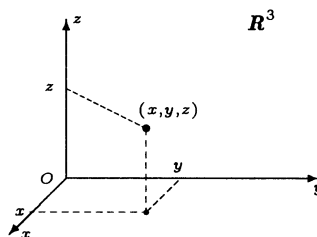
Przestrzenią trójwymiarową (przestrzenią) nazywamy zbiór wszystkich trójek uporządkowanych (x, y, z) , gdzie $x, y, z \in \mathbf{R}$. Przestrzeń tę oznaczamy przez \mathbf{R}^3 ;

$$\mathbf{R}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}.$$

Elementy (x, y) oraz (x, y, z) tych zbiorów nazywamy odpowiednio punktami płaszczyzny lub przestrzeni. Liczby x, y oraz x, y, z nazywamy współrzędnymi kartezjańskimi odpowiednio punktów (x, y) oraz (x, y, z) .



Rys. 3.1.1. Płaszczyzna.



Rys. 3.1.2. Przestrzeń.

● **Definicja 3.1.2** (*odległość punktów*)

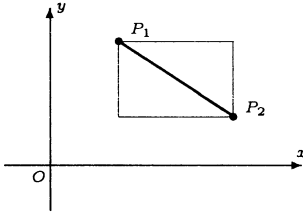
Odległość punktów P_1, P_2 płaszczyzny lub przestrzeni oznaczamy symbolem $|P_1 P_2|$ i określamy wzorem:

$$|P_1P_2| \stackrel{def}{=} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

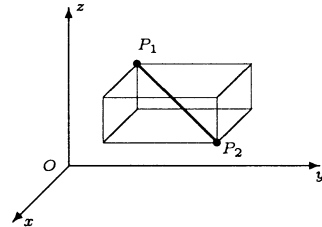
gdy $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbf{R}^2$ lub wzorem:

$$|P_1P_2| \stackrel{def}{=} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

gdy $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbf{R}^3$.



Rys. 3.1.3. Odległość dwóch punktów na płaszczyźnie.



Rys. 3.1.4. Odległość dwóch punktów w przestrzeni.

○ **Ćwiczenie 3.1.3**

Obliczyć odległości podanych punktów płaszczyzny lub przestrzeni:

a) $P = (0, 0)$, $Q = (3, -4)$; b) $A = (1, -2\sqrt{3}, \sqrt{5})$, $B = (-3, \sqrt{3}, -\sqrt{5})$.

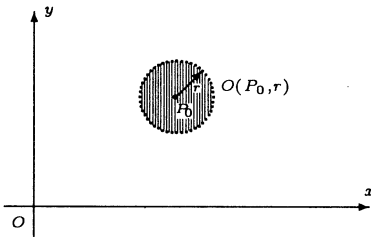
● **Definicja 3.1.4 (otoczenie punktu)**

Otoczeniem o promieniu $r > 0$ punktu P_0 na płaszczyźnie lub w przestrzeni nazywamy zbiór:

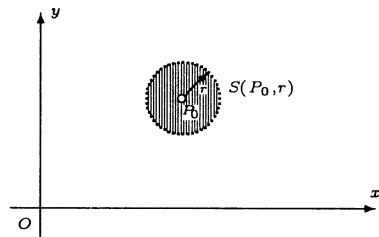
$$O(P_0, r) \stackrel{def}{=} \{P : |P_0P| < r\}.$$

Otoczeniem punktu na płaszczyźnie jest koło otwarte o środku w tym punkcie.

Otoczeniem punktu w przestrzeni jest kula otwarta o środku w tym punkcie.



Rys. 3.1.5. Otoczenie o promieniu r punktu P_0 na płaszczyźnie.



Rys. 3.1.6. Sąsiedztwo o promieniu r punktu P_0 na płaszczyźnie.

● **Definicja 3.1.5 (sąsiedztwo punktu)**

Sąsiedztwem o promieniu $r > 0$ punktu P_0 na płaszczyźnie lub w przestrzeni nazywamy zbiór:

$$S(P_0, r) \stackrel{def}{=} O(P_0, r) \setminus \{P_0\}.$$

Sąsiedztwem punktu na płaszczyźnie jest koło otwarte bez środka. Podobnie, sąsiedztwem punktu w przestrzeni jest kula otwarta bez środka.

○ **Ćwiczenie 3.1.6**

Naszkicować otoczenia i sąsiedztwa podanych punktów o wskazanych promieniach:

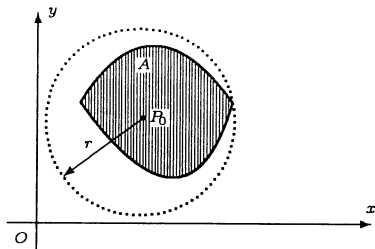
- a) $P_0 = (-1, 2)$, $r = \sqrt{5}$; b) $P_0 = (0, 4, -3)$, $r = 1$.

● **Definicja 3.1.7 (zbiór ograniczony i nieograniczony)**

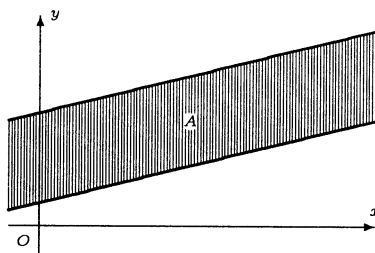
Zbiór A jest ograniczony, jeżeli jest zawarty w otoczeniu pewnego punktu, tzn.

$$\bigvee_{P_0} \bigvee_{r>0} A \subset O(P_0, r).$$

W przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór A jest nieograniczony.



Rys. 3.1.7. Zbiór A jest ograniczony na płaszczyźnie.



Rys. 3.1.8. Zbiór A jest nieograniczony na płaszczyźnie.

○ **Ćwiczenie 3.1.8**

Zbadać, czy podane zbiory na płaszczyźnie lub w przestrzeni są ograniczone:

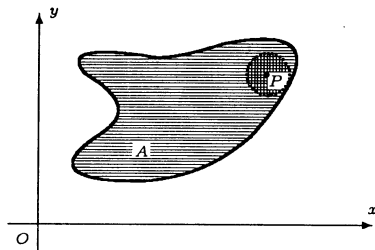
- a) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 2\}$; b) $B = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 3\}$;
 c) $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$; d) $D = \{(x, y, z) : x - y + z \leq 5\}$.

● **Definicja 3.1.9 (punkt wewnętrzny zbioru, wnętrze zbioru)**

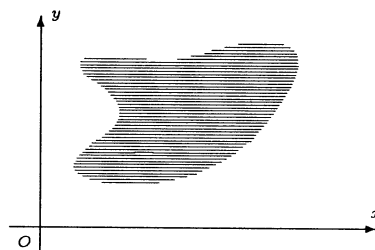
Niech A będzie zbiorem na płaszczyźnie lub w przestrzeni. Punkt P jest punktem wewnętrznym zbioru A , jeżeli istnieje otoczenie tego punktu zawarte w zbiorze A , tzn.

$$\bigvee_{r>0} O(P, r) \subset A.$$

Wnętrzem zbioru nazywamy zbiór wszystkich jego punktów wewnętrznych.



Rys. 3.1.9. P jest punktem wewnętrznym zbioru A .



Rys. 3.1.10. Zbiór punktów wewnętrznych zbioru A .

○ **Ćwiczenie 3.1.10**

Naszkicować wnętrza podanych zbiorów:

a) $A = \{(x, y) : 2x + x^2 + y^2 \leq 0\}$;

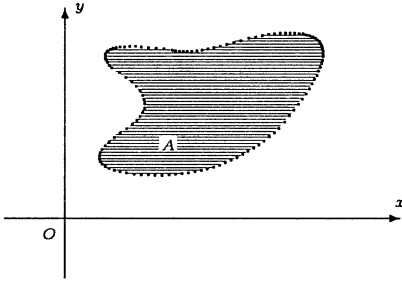
b) $B = \{(x, y) : y - x^2 + 1 \geq 0\}$;

c) $C = \{(x, y, z) : |x + y + z| \leq 1\}$;

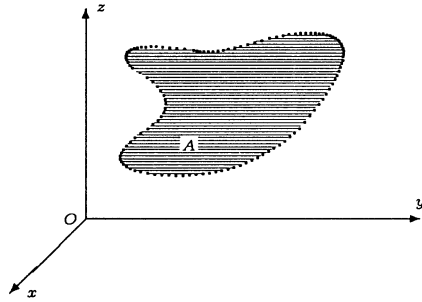
d) $D = \{(x, y, z) : xyz > 0\}$.

● **Definicja 3.1.11** (*zbiór otwarty*)

Zbiór jest otwarty, jeżeli każdy punkt tego zbioru jest jego punktem wewnętrznym.



Rys. 3.1.11. Zbiór A jest otwarty na płaszczyźnie.



Rys. 3.1.12. Zbiór A nie jest otwarty w przestrzeni.

○ **Ćwiczenie 3.1.12**

Zbadać, które z podanych podzbiorów płaszczyzny lub przestrzeni są otwarte:

a) $A = \{(x, y) : y > |x|\}$;

b) $B = \{(x, y) : \sin(x + y) < 1\}$;

c) $C = \{(x, y, z) : 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$;

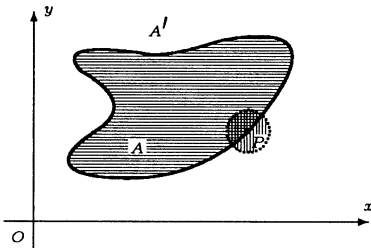
d) $D = \{(x, y, z) : x > 0, y \geq 1, z > 2\}$.

● **Definicja 3.1.13** (*punkt brzegowy zbioru, brzeg zbioru*)

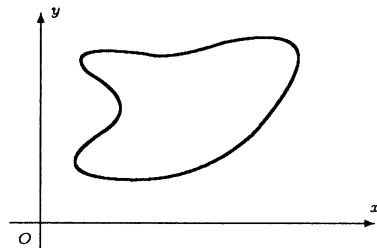
Niech A będzie zbiorem na płaszczyźnie lub w przestrzeni. Punkt P jest punktem brzegowym zbioru A , jeżeli w każdym otoczeniu tego punktu można znaleźć punkty należące do zbioru A i punkty nie należące do zbioru A , tzn.

$$\bigwedge_{r>0} (O(P, r) \cap A \neq \emptyset \text{ oraz } O(P, r) \cap A' \neq \emptyset).$$

Brzegiem zbioru nazywamy zbiór wszystkich jego punktów brzegowych.



Rys. 3.1.13. P jest punktem brzegowym zbioru A .



Rys. 3.1.14. Brzeg zbioru A .

○ **Ćwiczenie 3.1.14**

Naszycować brzegi podanych zbiorów:

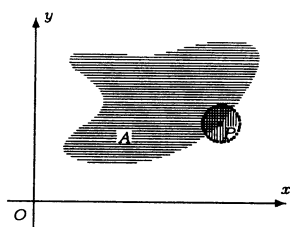
- a) $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$; b) $B = \{(x, y) : |y - x^2| > 2\}$;
 c) $C = \{(x, y, z) : xyz = 0\}$; d) $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 > 1\}$.

● **Definicja* 3.1.15 (punkt skupienia zbioru)**

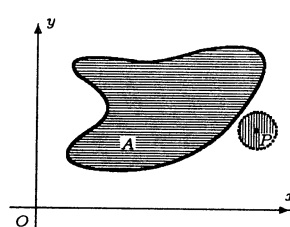
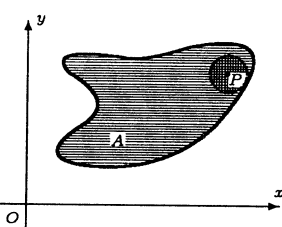
Niech A będzie zbiorem na płaszczyźnie lub w przestrzeni. Punkt P jest punktem skupienia zbioru A , jeżeli w każdym sąsiedztwie tego punktu można znaleźć punkty ze zbioru A , tzn.

$$\bigwedge_{r>0} S(P, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Uwaga. Punkty wewnętrzne i brzegowe zbioru są jego punktami skupienia.



Rys. 3.1.15. P jest punktem skupienia zbioru A .



Rys. 3.1.16. P nie jest punktem skupienia zbioru A .

○ **Ćwiczenie* 3.1.16**

Wyznaczyć zbiory punktów skupienia podanych zbiorów:

- a) $A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N} \right\}$; b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \neq 0\}$;
 c) $C = \left\{ \left(\frac{1}{n+m}, (-1)^{n+m} \right) \in \mathbb{R}^2 : m, n \in \mathbb{N} \right\}$; d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{Q}\}$.

● **Definicja 3.1.17 (zbiór domknięty)**

Zbiór jest domknięty, jeżeli zawiera swój brzeg.

○ **Ćwiczenie 3.1.18**

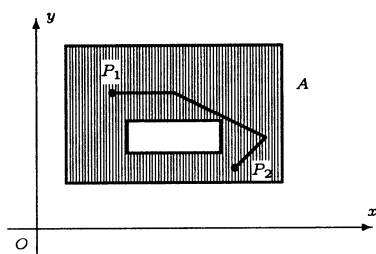
Zbadać, które z podanych podzbiorów płaszczyzny lub przestrzeni są domknięte:

- a) $A = \{(x, y) : x + y + 1 = 0\}$; b) $B = \{(x, y) : |x^2 + y^2 - 2| \leq 1\}$;
 c) $C = \{(x, y, z) : z > x\}$; d) $D = \{(x, y, z) : x + y^2 + z^2 = 4\}$.

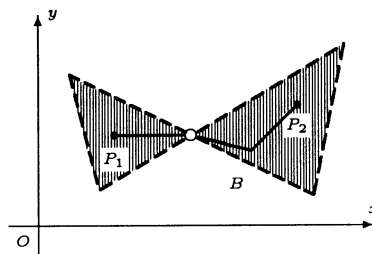
● **Definicja 3.1.19 (obszar, obszar domknięty)**

Niepusty zbiór jest obszarem, jeżeli:

1. jest otwarty,
 2. każde dwa punkty zbioru można połączyć łamaną całkowicie w nim zawartą.
- Obszar łącznie ze swoim brzegiem nazywamy obszarem domkniętym.



Rys. 3.1.17. Zbiór A jest obszarem domkniętym na płaszczyźnie.



Rys. 3.1.18. Zbiór B nie jest obszarem na płaszczyźnie.

○ **Ćwiczenie 3.1.20**

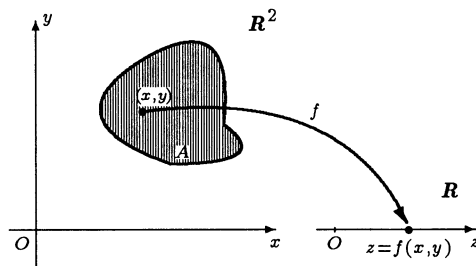
Spśród podanych zbiorów na płaszczyźnie lub w przestrzeni wskazać te, które są obszarami lub obszarami domkniętymi:

- a) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$; b) $A = \{(x, y) : |x| \leq |y|\}$;
 c) $C = \{(x, y, z) : 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$; d) $C = \{(x, y, z) : x \neq 0\}$.

3.2 Funkcje dwóch i trzech zmiennych

● **Definicja 3.2.1** (*funkcja dwóch zmiennych*)

Funkcją f dwóch zmiennych określoną na zbiorze $A \subset \mathbf{R}^2$ o wartościach w \mathbf{R} nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi ze zbioru A dokładnie jednej liczby rzeczywistej. Wartość funkcji f w punkcie (x, y) oznaczamy przez $f(x, y)$. Funkcję taką oznaczamy przez $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ lub $z = f(x, y)$, gdzie $(x, y) \in A$.



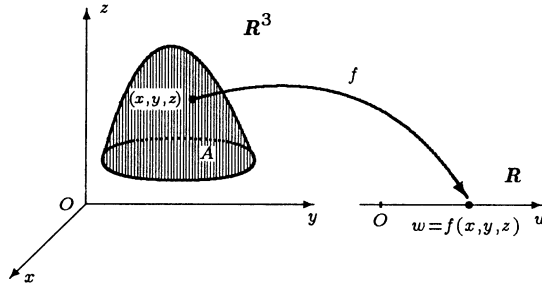
Rys. 3.2.1. Ilustracja do definicji funkcji dwóch zmiennych.

○ **Przykład 3.2.2**

- a) $f(x, y) = \ln x + y^2 + 1$; b) $g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;
 c) $h(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{dla } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$ d) $k(x, y) = e^y$;
 e) $v(s, t) = \frac{s}{t}$, gdzie v oznacza średnią prędkość ciała, które przebyło drogę s w czasie t ;
 f) $P(a, b) = \pi ab$, gdzie P oznacza pole elipsy o półosiach a, b .

● **Definicja 3.2.3** (funkcja trzech zmiennych)

Funkcją f trzech zmiennych określoną na zbiorze $A \subset \mathbf{R}^3$ o wartościach w \mathbf{R} nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi ze zbioru A dokładnie jednej liczby rzeczywistej. Wartość funkcji f w punkcie (x, y, z) oznaczamy przez $f(x, y, z)$. Funkcję taką oznaczamy przez $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ lub $w = f(x, y, z)$, gdzie $(x, y, z) \in A$.



Rys. 3.2.2. Ilustracja do definicji funkcji trzech zmiennych.

○ **Przykład 3.2.4**

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$;

b) $g(x, y, z) = \arcsin \frac{xy}{z}$;

c) $h(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x-y} & \text{dla } x > y, \\ e^{x+y+z} & \text{dla } x \leq y; \end{cases}$

d) $k(x, y, z) = x + z$;

e) $V(a, b, c) = abc$, gdzie V oznacza objętość prostopadłościanu o krawędziach a, b, c ;

f) $W(k, p, n) = k \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, gdzie W oznacza wielkość kapitału uzyskanego po n latach z kapitału k oddanego do banku na $p\%$ rocznie.

● **Definicja 3.2.5** (dziedzina, dziedzina naturalna)

Niech f będzie funkcją określoną na podzbiórze płaszczyzny (przestrzeni). Wtedy zbiór ten nazywamy dziedziną funkcji f i oznaczamy przez D_f . Jeżeli dany jest tylko wzór określający funkcję, to zbiór punktów płaszczyzny (przestrzeni), dla których wzór ten ma sens, nazywamy dziedziną naturalną funkcji.

○ **Ćwiczenie 3.2.6**

Znaleźć i narysować dziedziny naturalne podanych funkcji dwóch lub trzech zmiennych:

a) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$;

b) $g(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$;

c) $p(x, y) = \frac{1}{(x-2)(y+1)}$;

d) $h(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}$;

e) $k(x, y, z) = \frac{10}{e^{x+y-z} - 1}$;

f*) $q(x, y, z) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2 + z^2) - 1}$.

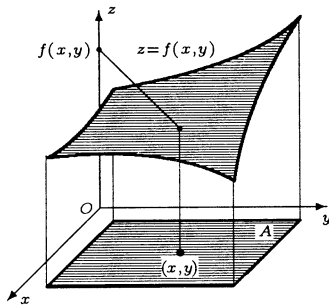
● **Definicja 3.2.7** (wykres i poziomica funkcji dwóch zmiennych)

Wykresem funkcji f dwóch zmiennych nazywamy zbiór:

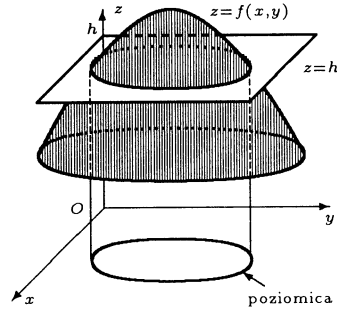
$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in D_f, z = f(x, y)\}.$$

Poziomicą wykresu funkcji f , odpowiadającą poziomowi $h \in \mathbf{R}$, nazywamy zbiór:

$$\{(x, y) \in D_f : f(x, y) = h\}.$$



Rys. 3.2.3. Wykres funkcji dwóch zmiennych określonej na zbiorze A.



Rys. 3.2.4. Poziomica wykresu funkcji f odpowiadająca poziomowi h .

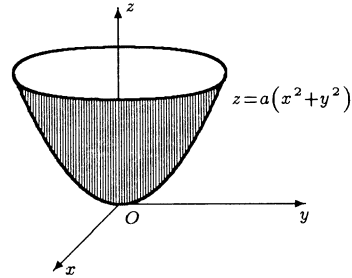
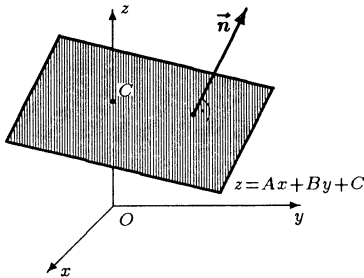
○ **Ćwiczenie 3.2.8**

Znaleźć poziomice podanych funkcji dwóch zmiennych i na tej podstawie naszkicować wykresy tych funkcji:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; b) $g(x, y) = \frac{1}{x + y}$; c) $h(x, y) = y - x^2$; d) $k(x, y) = xy$.

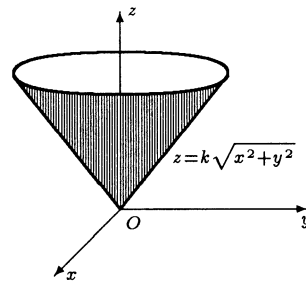
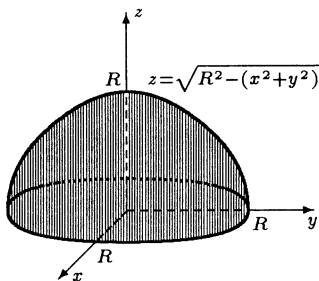
● **Fakt 3.2.9** (wykresy ważniejszych funkcji dwóch zmiennych)

1. Wykresem funkcji $z = Ax + By + C$ jest płaszczyzna o wektorze normalnym $\vec{n} = (-A, -B, 1)$ przechodząca przez punkt $(0, 0, C)$.

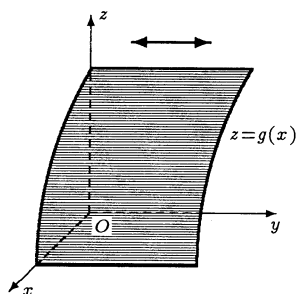
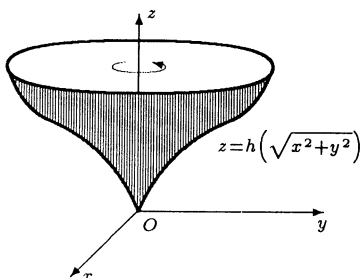


2. Wykresem funkcji $z = a(x^2 + y^2)$ jest paraboloida obrotowa, tj. powierzchnia powstała z obrotu paraboli $z = ax^2$ wokół osi Oz .

3. Wykresem funkcji $z = \pm\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ jest górna (+) lub dolna (-) półsfera o środku w początku układu współrzędnych i promieniu R .



4. Wykresem funkcji $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$ jest stożek, tj. powierzchnia powstała z obrotu półprostej $z = kx, y = 0$ dla $x \geq 0$ wokół osi Oz .
5. Wykresem funkcji $z = h(\sqrt{x^2 + y^2})$ jest powierzchnia obrotowa powstała z obrotu wykresu funkcji $z = h(x), y = 0$ dla $x \geq 0$ wokół osi Oz .



6. Wykresem funkcji $z = g(x)$ lub $z = h(y)$ jest powierzchnia walcowa powstała z przesunięcia wykresu funkcji $z = g(x)$ dla $y = 0$ równoległe do osi Oy lub odpowiednio wykresu funkcji $z = h(y)$ dla $x = 0$ równoległe do osi Ox .

● **Fakt 3.2.10** (przesunięcia i odbicia wykresów funkcji)

1. Wykres funkcji

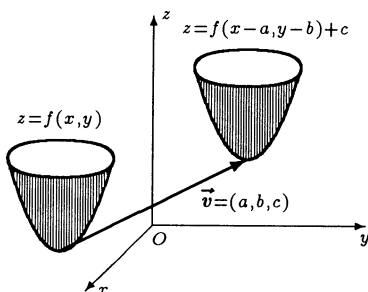
$$z = f(x - a, y - b) + c$$

powstaje z wykresu funkcji $z = f(x, y)$ przez przesunięcie o wektor $\vec{v} = (a, b, c)$.

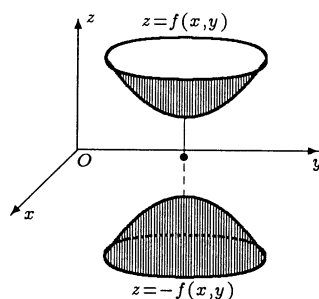
2. Wykres funkcji

$$z = -f(x, y)$$

powstaje z wykresu funkcji $z = f(x, y)$ przez symetrię względem płaszczyzny xOy .



Rys. 3.2.5. Przesunięcie wykresu funkcji o wektor $\vec{v} = (a, b, c)$.



Rys. 3.2.6. Odbicie wykresu funkcji względem płaszczyzny xOy .

○ **Ćwiczenie 3.2.11**

Opisać, za pomocą jakich przekształceń geometrycznych wykresu funkcji $z = f(x, y)$, można otrzymać wykresy funkcji:

- a) $z = f(2x, 3y)$; b) $z = f(-x, y)$; c) $z = |f(x, y)|$; d) $z = 4f(x, y)$; e) $z = f(x, |y|)$.

○ **Ćwiczenie 3.2.12**

Naszkicować wykresy podanych funkcji dwóch zmiennych:

- a) $z = 3(x^2 + y^2)$; b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; c) $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$;
 d) $z = 6 - 3x - 2y$; e) $z = x - y^2$; f) $z = x^2 - y^2$;
 g) $z = 4 - x^2 - y^2$; h) $z = 1 - \sqrt{2x - x^2 + 4y - y^2}$; i) $z = 1 - |y - 2|$;
 j) $z = \sin(x^2 + y^2)$; k) $z = 1 + \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$; l) $z = x + y - xy$.

● **Definicja 3.2.13** (*funkcja ograniczona*)

Funkcja f dwóch zmiennych jest ograniczona na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli zbiór wartości funkcji f na zbiorze A jest ograniczony, tzn.

$$\bigvee_{M>0} \bigwedge_{(x,y) \in A} |f(x,y)| \leq M.$$

Uwaga. Definicja funkcji ograniczonej trzech zmiennych jest analogiczna. Definicje funkcji dwóch i trzech zmiennych ograniczonych z dołu lub z góry są podobne do odpowiednich definicji dla funkcji jednej zmiennej.

○ **Ćwiczenie 3.2.14**

Zbadać, które z podanych funkcji dwóch lub trzech zmiennych są ograniczone, ograniczone z dołu, ograniczone z góry w swoich dziedzinach naturalnych:

- a) $f(x,y) = \sin x + \cos y$; b) $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; c*) $p(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$;
 d) $h(x,y,z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 4}$; e) $k(x,y,z) = x + y - z$; f) $q(x,y,z) = x^2 + y^4$.

3.3 Granice funkcji w punkcie

● **Definicja 3.3.1** (*ciąg na płaszczyźnie*)

Ciągiem punktów na płaszczyźnie nazywamy odwzorowanie zbioru liczb naturalnych w zbiór \mathbf{R}^2 . Wartość tego odwzorowania dla liczby naturalnej n nazywamy n -tym wyrazem ciągu i oznaczamy przez $P_n = (x_n, y_n)$. Ciąg taki oznaczamy przez (P_n) lub $((x_n, y_n))$. Zbiór wyrazów tego ciągu, tj. zbiór $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbf{N}\}$, oznaczamy krótko przez $\{P_n\}$ lub $\{(x_n, y_n)\}$.

○ **Ćwiczenie 3.3.2**

Naszkicować na płaszczyźnie kilka pierwszych wyrazów podanych ciągów:

- a) $(x_n, y_n) = \left(n, \frac{1}{n}\right)$; b) $(x_n, y_n) = \left(\frac{n}{n+1}, \frac{1}{n^2}\right)$;
 c) $(x_n, y_n) = ((-1)^n, (-1)^{n+1})$; d) $(x_n, y_n) = \left(\cos \frac{n\pi}{6}, \sin \frac{n\pi}{6}\right)$.

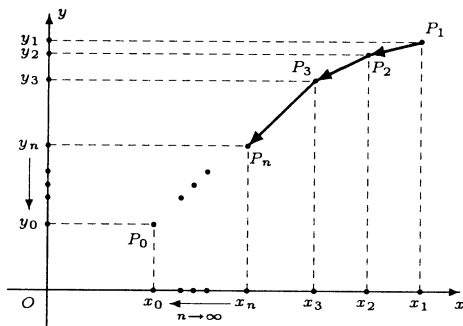
● **Definicja 3.3.3** (*granica właściwa ciągu*)

Ciąg $(P_n) = ((x_n, y_n))$ jest zbieżny do punktu $P_0 = (x_0, y_0)$, co notujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0 \quad \text{lub} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0),$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0.$$



Rys. 3.3.1. Ilustracja do definicji granicy właściwej ciągu na płaszczyźnie.

Uwaga. Ciąg (P_n) jest zbieżny do punktu P_0 , jeżeli w dowolnym otoczeniu punktu P_0 znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu. Definicja ciągu punktów w przestrzeni i definicja granicy takiego ciągu są analogiczne.

○ **Ćwiczenie 3.3.4**

Zbadać, czy podane ciągi na płaszczyźnie lub w przestrzeni są zbieżne (dla ciągów zbieżnych wskazać ich granice):

a) $(x_n, y_n) = \left(\log_{n+1} 2, \frac{1}{n}\right)$;

b) $(x_n, y_n) = (2^n, (-1)^n)$;

c) $(x_n, y_n, z_n) = \left(\sqrt[n]{n}, \frac{n+1}{n}, 3\right)$;

d) $(x_n, y_n, z_n) = \left(\frac{1}{2^n}, \left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$.

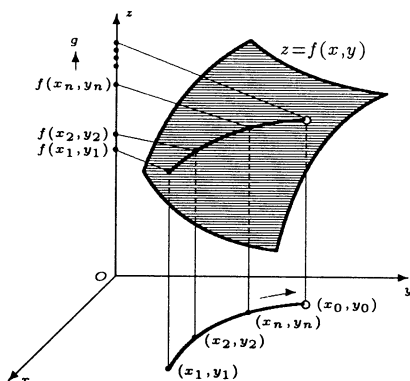
● **Definicja 3.3.5** (Heinego granicy właściwej funkcji w punkcie)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0, y_0)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie (x_0, y_0) , co zapisujemy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\substack{((x_n, y_n)) \\ ((x_n, y_n)) \subset S(x_0, y_0)}} \left[\left(\begin{array}{l} (x_n, y_n) \neq (x_0, y_0) \text{ dla } n \in \mathbf{N} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \end{array} \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = g \right) \right].$$



Rys. 3.3.2. Ilustracja do definicji Heinego granicy właściwej funkcji w punkcie.

Uwaga. W podobny sposób można określić granicę funkcji w punkcie skupienia dowolnego zbioru na płaszczyźnie oraz granicę funkcji trzech zmiennych. Granicę funkcji f w punkcie (x_0, y_0) oznaczamy także przez $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$. Można również pisać $f(x, y) \rightarrow g$, gdy $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

○ **Ćwiczenie 3.3.6**

Korzystając z definicji granicy uzasadnić podane równości:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{2x - y}{x^2 + y^2} = 0$; b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-3,4)} \sqrt{x^2 + y^2} = 5$.

○ **Ćwiczenie 3.3.7**

Uzasadnić, że podane granice nie istnieją:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x + y}$; b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$; c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^6}{y^2 - 1}$;
 d*) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi,0)} \frac{\sin x}{\sin y}$; e*) $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,-3)} \frac{xy + 12}{x^2 + y^2 - 25}$; f*) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x + y}$.

● **Definicja 3.3.8** (*Heinego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie*)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0, y_0)$. Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) , granicę niewłaściwą $\pm\infty$ co zapisujemy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \pm\infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\substack{\{(x_n, y_n)\} \\ \{(x_n, y_n)\} \subset S(x_0, y_0)}} \left[\left(\begin{array}{l} (x_n, y_n) \neq (x_0, y_0) \text{ dla } n \in \mathbf{N} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \end{array} \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \pm\infty \right) \right].$$

Uwaga. Podobnie można określić granice niewłaściwe funkcji w punkcie skupienia dowolnego zbioru na płaszczyźnie. Analogicznie definiujemy obie granice niewłaściwe dla funkcji trzech zmiennych.

○ **Ćwiczenie 3.3.9**

Korzystając z definicji granicy niewłaściwej funkcji uzasadnić podane równości:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^4 + y^4} = \infty$; b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \ln((x - 1)^2 + y^2) = -\infty$.

● **Twierdzenie 3.3.10** (*o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji*)

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = p \\ 2. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y) = q \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x, y) \pm g(x, y)] = p \pm q, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x, y)g(x, y)] = pq, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{p}{q}, \text{ jeśli } q \neq 0. \end{array} \right.$$

● **Twierdzenie 3.3.11** (o granicy funkcji złożonej)

Jeżeli

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} p(x,y) = p_0$ oraz $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} q(x,y) = q_0$
 2. $\lim_{(p,q) \rightarrow (p_0,q_0)} f(p,q) = g$
 3. $(p(x,y), q(x,y)) \neq (p_0, q_0)$ dla każdego $(x,y) \in S(x_0, y_0)$
- to $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(p(x,y), q(x,y)) = g$.

Uwaga. Powyższe twierdzenia są prawdziwe także dla funkcji trzech zmiennych. W twierdzeniu tym dopuszczalne są także granice niewłaściwe, o ile odpowiednie działania z takimi symbolami są oznaczone. Do znajdowania granic funkcji dwóch i trzech zmiennych można stosować twierdzenia o dwóch i o trzech funkcjach, analogiczne do takich twierdzeń dla funkcji jednej zmiennej. **Nie ma odpowiednika reguły de L'Hospitala do obliczania granic wyrażeń nieoznaczonych funkcji dwóch i trzech zmiennych.**

○ **Ćwiczenie 3.3.12**

Obliczyć podane granice funkcji:

- | | |
|---|--|
| <p>a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$;</p> <p>c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) \cos \frac{1}{xy}$;</p> <p>e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$;</p> | <p>b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^3-y^3}{y-x}$;</p> <p>d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\sin x^2 y}{x^2}$;</p> <p>f*) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^4+y^6+z^8}{x^2+y^2+z^2}$.</p> |
|---|--|

3.4 Funkcje ciągłe

● **Definicja 3.4.1** (funkcja dwóch zmiennych ciągła w punkcie)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, y_0)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie (x_0, y_0) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

● **Definicja 3.4.2** (funkcja dwóch zmiennych ciągła na zbiorze otwartym)

Funkcja jest ciągła na zbiorze otwartym na płaszczyźnie, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Uwaga. W podobny sposób można zdefiniować ciągłość funkcji w punkcie skupienia dowolnego zbioru na płaszczyźnie oraz ciągłość na tym zbiorze. Definicje ciągłości w punkcie i na zbiorze dla funkcji trzech zmiennych są analogiczne.

● **Twierdzenie 3.4.3** (działania na funkcjach ciągłych)

Suma, różnica, iloraz, iloczyn, iloraz oraz złożenie funkcji ciągłych są funkcjami ciągłymi.

○ **Ćwiczenie 3.4.4**

Zbadać ciągłość podanych funkcji:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x^2 + y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 < 1, \\ x^2 + y^2 - 1 & \text{dla } x^2 + y^2 \geq 1; \end{cases}$$

$$b) g(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{dla } x > 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \text{dla } x \leq 0; \end{cases}$$

$$c) h(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y}{x^2 - y^2} & \text{dla } |x| \neq |y|, \\ 2 & \text{dla } |x| = |y|. \end{cases}$$

● **Twierdzenie 3.4.5** (*Weierstrassa o osiągnięciu kresów*)

Jeżeli

1. zbiór $D \subset \mathbf{R}^2$ jest domknięty i ograniczony,
2. funkcja f jest ciągła na D ,

to

$$\bigvee_{(x_1, y_1) \in D} f(x_1, y_1) = \sup \{f(x, y) : (x, y) \in D\}$$

oraz

$$\bigvee_{(x_2, y_2) \in D} f(x_2, y_2) = \inf \{f(x, y) : (x, y) \in D\}.$$

Uwaga. Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie dla funkcji trzech zmiennych. Twierdzenia te można wykorzystać do uzasadnienia, że funkcja dwóch lub trzech zmiennych ma ekstrema w punktach spełniających warunki konieczne ich istnienia.

○ **Ćwiczenie 3.4.6**

Korzystając z twierdzenia Weierstrassa o osiągnięciu kresów uzasadnić, że poniższe zagadnienia geometryczne na ekstrema mają rozwiązania:

- a) wśród prostopadłościanów wpisanych w kulę o promieniu R znaleźć ten, który ma największą objętość;
- b) wśród trójkątów opisanych na kole o promieniu R znaleźć ten, który ma najmniejsze pole;
- c*) w przestrzeni istnieje punkt taki, że suma jego odległości o danych punktów A, B, C, D jest najmniejsza.

4

Rachunek różniczkowy funkcji dwóch i trzech zmiennych

4.1 Pochodne cząstkowe funkcji

● **Definicja 4.1.1** (*pochodne cząstkowe pierwszego rzędu*)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, y_0)$. Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem x w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Pochodną tę oznaczamy także symbolami: $f_x(x_0, y_0)$, $D_1 f(x_0, y_0)$. Podobnie jest określona pochodna cząstkowa pierwszego rzędu funkcji f względem y w punkcie (x_0, y_0) :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Pochodną tę oznaczamy także symbolami: $f_y(x_0, y_0)$, $D_2 f(x_0, y_0)$.

Uwaga. Analogicznie określa się pochodne cząstkowe pierwszego rzędu dla funkcji trzech zmiennych. Jeżeli granice określające pochodne cząstkowe są właściwe (niewłaściwe), to mówimy, że odpowiednie pochodne cząstkowe są właściwe (niewłaściwe).

○ **Ćwiczenie 4.1.2**

Korzystając z definicji obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, $(x_0, y_0) = (-1, 1)$; b) $f(x, y) = y \sin x$, $(x_0, y_0) = (0, \pi)$;

- c) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$;
 d) $f(x, y, z) = x + 2xy - 3xyz$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$;
 e) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^4 - z^6}$, $(x_0, y_0, z_0) = (-2, 1, 0)$.

● **Definicja 4.1.3** (pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na zbiorze otwartym)

Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie zbioru otwartego $D \subset \mathbf{R}^2$, to funkcje $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, gdzie $(x, y) \in D$, nazywamy pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu funkcji f na zbiorze D i oznaczamy odpowiednio przez $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ lub f_x , f_y albo też przez $D_1 f$, $D_2 f$. Analogicznie określa się pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na zbiorze otwartym $U \subset \mathbf{R}^3$ dla funkcji trzech zmiennych.

Uwaga. Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej względem jednej zmiennej pozostałe zmienne traktujemy jak stałe. Niech $F(x) \stackrel{def}{=} f(x, y_0)$ oraz $G(y) \stackrel{def}{=} g(x_0, y)$, gdzie $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ jest ustalonym punktem. Wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = F'(x_0) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = G'(y_0).$$

Do obliczania pochodnych cząstkowych można stosować reguły różniczkowania funkcji jednej zmiennej, tj. wzory na pochodne sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu oraz złożenia funkcji.

○ **Ćwiczenie 4.1.4**

Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji:

- a) $f(x, y) = \frac{e^x}{\ln(x+y)}$; b) $f(x, y) = \arcsin \frac{xy}{x+y}$;
 c) $f(x, y) = x^y$; d) $g(x, y, z) = \frac{x^2 \sin y}{\cos y - \sin z}$;
 e) $g(x, y, z) = \sin(x \operatorname{tg}(y \cos z))$; f) $g(x, y, z) = \sqrt[3]{\operatorname{arctg}(x + e^{yz})}$.

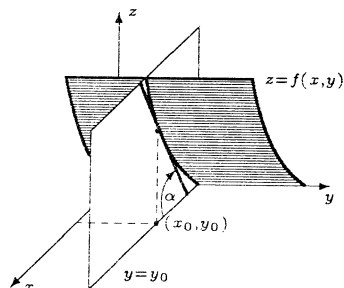
● **Fakt 4.1.5** (interpretacja geometryczna pochodnych cząstkowych)

Niech funkcja $z = f(x, y)$ ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0) . Ponadto niech α oznacza kąt nachylenia stycznej do krzywej otrzymanej w wyniku przekroju wykresu funkcji f płaszczyzną $y = y_0$ w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, do płaszczyzny xOy oraz niech β oznacza kąt nachylenia stycznej do krzywej otrzymanej w wyniku przekroju wykresu funkcji f płaszczyzną $x = x_0$. Wtedy

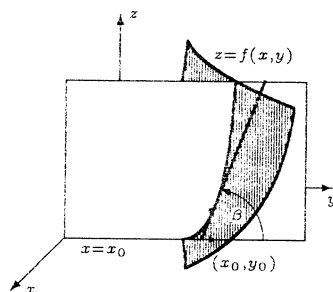
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta.$$

Pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ jest miarą lokalnej szybkości wzrostu funkcji f względem zmiennej x przy ustalonej wartości zmiennej y . Podobnie jest dla pochodnej cząstkowej $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ oraz dla pochodnych cząstkowych funkcji trzech

zmiennych.



Rys. 4.1.1. Interpretacja geometryczna pochodnej cząstkowej $f_x(x_0, y_0)$.



Rys. 4.1.2. Interpretacja geometryczna pochodnej cząstkowej $f_y(x_0, y_0)$.

Uwaga. Odmienne niż dla funkcji jednej zmiennej wygląda związek między ciągłością funkcji a istnieniem pochodnych cząstkowych. Funkcja dwóch zmiennych może mieć w punkcie obie pochodne cząstkowe, ale nie musi być w tym punkcie ciągła.

○ Ćwiczenie 4.1.6

Sprawdzić, że podane funkcje mają w punkcie $(x_0, y_0) = (0, 0)$ obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, ale nie są w tym punkcie ciągłe:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } xy = 0, \\ 0 & \text{dla } xy \neq 0; \end{cases} \\ \text{b) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

○ Ćwiczenie 4.1.7

Sprawdzić, że podane funkcje są ciągłe we wskazanych punktach, ale nie mają w tych punktach pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu:

$$\text{a) } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x_0, y_0) = (0, 0); \quad \text{b) } f(x, y) = |x| + |y - 1|, \quad (x_0, y_0) = (0, 1).$$

● Definicja 4.1.8 (pochodne cząstkowe drugiego rzędu)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, y_0)$. Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorami:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0, y_0), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0, y_0). \end{aligned}$$

Powyższe pochodne oznaczamy także odpowiednio przez $f_{xx}(x_0, y_0)$, $f_{xy}(x_0, y_0)$, $f_{yx}(x_0, y_0)$, $f_{yy}(x_0, y_0)$ albo też przez $D_{11}f(x_0, y_0)$, $D_{12}f(x_0, y_0)$, $D_{21}f(x_0, y_0)$, $D_{22}f(x_0, y_0)$.

Uwaga. Analogicznie określa się pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji trzech zmiennych.

● **Definicja 4.1.9** (pochodne cząstkowe drugiego rzędu na obszarze)

Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe drugiego rzędu w każdym punkcie zbioru otwartego $D \subset \mathbf{R}^2$, to funkcje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y),$$

gdzie $(x, y) \in D$, nazywamy pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu funkcji f na zbiorze D i oznaczamy odpowiednio przez $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ lub przez f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} , f_{yy} lub też $D_{11}f$, $D_{12}f$, $D_{21}f$, $D_{22}f$.

Uwaga. Analogicznie określa się pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji trzech zmiennych na zbiorze otwartym $U \subset \mathbf{R}^3$.

○ **Ćwiczenie 4.1.10**

Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu podanych funkcji:

a) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$;

b) $f(x, y) = \sin xy$;

c) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$;

d) $f(x, y, z) = x^{yz}$;

e) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 x - 2x^3 y^2 z^5$;

f) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x + y - z}$.

● **Definicja 4.1.11** (pochodne cząstkowe wyższych rzędów)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f ma pochodne cząstkowe rzędu $n \geq 2$ przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, y_0)$. Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0) pochodnych cząstkowych rzędu n funkcji f nazywamy pochodnymi cząstkowymi rzędu $n + 1$ funkcji f w punkcie (x_0, y_0) . Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe rzędu n w każdym punkcie zbioru otwartego D , to mówimy, że na zbiorze D są określone pochodne cząstkowe rzędu n funkcji f . Pochodną cząstkową n -tego rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) , powstałą w wyniku k -krotnego różniczkowania względem zmiennej x i następnie l -krotnego różniczkowania względem zmiennej y , gdzie $k + l = n$, oznaczamy przez

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^l \partial x^k}(x_0, y_0).$$

Analogicznie określa się i oznacza pochodne cząstkowe rzędu $n \geq 3$ funkcji trzech zmiennych. Funkcja dwóch zmiennych ma 2^n pochodnych cząstkowych rzędu n , a funkcja trzech zmiennych 3^n pochodnych cząstkowych rzędu n . Pochodne cząstkowe, w których występuje różniczkowanie względem dwóch różnych zmiennych, nazywamy pochodnymi cząstkowymi mieszanymi.

○ **Ćwiczenie 4.1.12**

Dla podanych funkcji obliczyć wskazane pochodne cząstkowe:

a) $f(x, y) = e^{xy}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$;

b) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$, $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial z \partial y^2}$;

c) $f(x, y) = \frac{\sin x}{\sin y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$;

d) $f(x, y, z) = \ln(x + 2y - 3z)$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z^2}$.

● **Twierdzenie 4.1.13** (*Schwarza o pochodnych mieszanych*)

Jeżeli pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ są ciągłe w punkcie (x_0, y_0) , to są równe tj.:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Uwaga. Prawdziwe są także analogiczne równości dla pochodnych mieszanych drugiego rzędu funkcji trzech zmiennych, a także dla pochodnych mieszanych wyższych rzędów.

○ **Ćwiczenie 4.1.14**

Dla podanych funkcji sprawdzić równości między podanymi pochodnymi mieszanymi:

- a) $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$; b) $f(x, y) = x^2 \sin y$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$;
- c) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$;
- d) $f(x, y, z) = x^2 y + z y^3$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y}$.

○ **Ćwiczenie 4.1.15**

Sprawdzić, czy pochodne cząstkowe mieszane drugiego rzędu podanych funkcji w punkcie $(x_0, y_0) = (0, 0)$ istnieją i są sobie równe:

- a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$
- b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^3}{x^4 + y^4} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$
- c) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 - y^3}$;
- d) $f(x, y) = \begin{cases} x^4 - y^4 & \text{dla } |x| \leq |y|, \\ y^4 - x^4 & \text{dla } |x| > |y|. \end{cases}$

4.2 Różniczka funkcji

● **Definicja* 4.2.1** (*funkcja różniczkowalna w punkcie*)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Uwaga*. Analogicznie definiuje się różniczkowalność w punkcie funkcji trzech zmiennych. Istnienie pochodnych cząstkowych funkcji w punkcie nie gwarantuje jeszcze różniczkowalności funkcji w tym punkcie.

○ **Ćwiczenie* 4.2.2**

Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x, y) = x^3 + xy$, $(x_0, y_0) = (1, -2)$;

b) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$;

c) $f(x, y, z) = xy \sin z$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, \pi)$.

● **Twierdzenie* 4.2.3** (*warunek konieczny różniczkowalności funkcji*)

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie, to jest ciągła w tym punkcie.

Uwaga*. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Świadczy o tym przykład funkcji $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, która jest ciągła w punkcie $(0, 0)$, ale nie jest w tym punkcie różniczkowalna.

● **Twierdzenie* 4.2.4** (*warunek wystarczający różniczkowalności*)

Jeżeli pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ są ciągłe w punkcie (x_0, y_0) , to funkcja f jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0) .

Uwaga*. Twierdzenie to jest prawdziwe także dla funkcji trzech zmiennych.

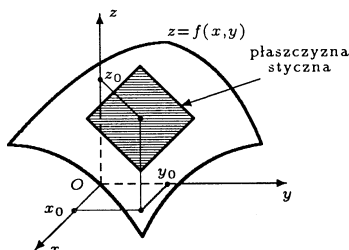
○ **Ćwiczenie* 4.2.5**

Korzystając z powyższego twierdzenia uzasadnić, że podane funkcje są różniczkowalne w swoich dziedzinach:

a) $f(x, y) = x^2 + y^3$; b) $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x + y)$; c) $f(x, y, z) = \frac{\sin xyz}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$.

● **Fakt* 4.2.6** (*interpretacja geometryczna funkcji różniczkowalnej w punkcie*)

Różniczkowalność funkcji f w punkcie (x_0, y_0) oznacza, że istnieje płaszczyzna styczna (niepionowa) do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



Rys. 4.2.1. Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji.

● **Fakt 4.2.7** (*równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji*)

Niech funkcja f ma ciągle pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0) .

Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ma postać:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

○ **Ćwiczenie 4.2.8**

Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach tych wykresów:

a) $f(x, y) = \frac{\arctg x}{1 + y^2}$, $(x_0, y_0, z_0) = \left(1, 0, \frac{\pi}{4}\right)$; b) $f(x, y) = x^y$, $(x_0, y_0, z_0) = (2, 4, 16)$.

○ **Ćwiczenie 4.2.9**

- Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z = x^4 - 3y^2$, która jest równoległa do płaszczyzny $\pi: 3x + 12y - z - 5 = 0$;
- Napisać równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z = 1 + x^2 + y^2$, która jest prostopadła do prostej $l: 3x = 2y = z$;
- Na wykresie funkcji $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ znaleźć punkt, który jest położony najbliżej płaszczyzny $\pi: x + 3y + 2z = 36$;
- W \mathbf{R}^3 dane są punkty $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (1, 2, 3)$. Na powierzchni $z = x^4 + y^4$ znaleźć punkt D taki, aby objętość czworokąta $ABCD$ była najmniejsza;
- e*) Znaleźć wszystkie płaszczyzny styczne do wykresu funkcji $z = x^2 + y^2$, które przechodzą przez punkty $P = (0, 1)$, $Q = (2, 0)$.

● **Definicja 4.2.10** (*różniczka funkcji*)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0) . Różniczką funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy funkcję zmiennych Δx , Δy określoną wzorem:

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) \stackrel{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Różniczkę funkcji f oznacza się także przez $df(x_0, y_0)$ lub krótko df .

Uwaga. Analogicznie definiuje się różniczkę funkcji trzech zmiennych.

○ **Ćwiczenie 4.2.11**

Napisać różniczki podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (3, -4)$; b) $g(x, y, z) = xyz^2$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 2)$.

● **Fakt 4.2.12** (*zastosowanie różniczki funkcji do obliczeń przybliżonych*)

Niech funkcja f ma ciągle pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0) . Wtedy

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0).$$

Uwaga. Prawdziwy jest także analogiczny wzór przybliżony dla funkcji trzech zmiennych. Wzory te wykorzystuje się do obliczeń przybliżonych skomplikowanych

wyrażeń algebraicznych. Błąd $\delta(\Delta x, \Delta y)$ powyższego przybliżenia dąży szybciej do 0 niż wyrażenie $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, tzn. spełnia równość:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\delta(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

○ Ćwiczenie 4.2.13

Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

a) $(1,02)^4 \cdot (0,97)^2$; b) $\frac{\arctg 1,001}{\arcsin 0,49}$;

c) $(1,04)^{3,01}$; d) $\sqrt[3]{(3,03)^3 + (4,04)^3 + (5,05)^3}$;

e*) Dla liczb rzeczywistych x, y z przedziału $[1, 2]$ ich potęga x^y jest wyznaczona w ten sposób, że przed obliczeniami każda z nich jest zaokrąglana do ósmego miejsca po przecinku. Obliczyć największy błąd tych obliczeń.

○ Ćwiczenie 4.2.14

a) Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się objętość walca o promieniu podstawy $R = 1$ m i wysokości $H = 2$ m, jeżeli jego wysokość zwiększymy o 1 cm, a promień podstawy zmniejszymy o 3 cm ?

b) Ciśnienie gazu w pewnym procesie technologicznym wyraża się wzorem $p = \frac{100e^T}{V}$, gdzie T jest temperaturą gazu, a V jego objętością. Aktualnie wartości tych parametrów wynoszą $T = 0^\circ \text{C}$, $V = 300 \text{ m}^3$. Objętość gazu wzrosła o 1 m^3 . Obliczyć w przybliżeniu, jak należy zmienić temperaturę gazu, aby jego ciśnienie nie uległo zmianie.

● Fakt 4.2.15 (zastosowanie różniczki funkcji do szacowania błędów pomiarów)

Niech wielkości fizyczne x, y, z będą związane zależnością $z = f(x, y)$, gdzie funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu. Ponadto niech Δ_x i Δ_y oznaczają odpowiednio błędy bezwzględne pomiaru wielkości x i y . Wtedy błąd bezwzględny Δ_z obliczeń wielkości z wyraża się wzorem przybliżonym:

$$\Delta_z \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta_x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta_y.$$

Prawdziwe są także analogiczne wzory dla większej liczby wielkości fizycznych.

○ Ćwiczenie 4.2.16

a) Przy pomocy menzurki można zmierzyć objętość ciała z dokładnością $\Delta_V = 0,1 \text{ cm}^3$, a przy pomocy wagi sprężynowej można ustalić jego masę z dokładnością $\Delta_M = 1 \text{ g}$. Objętość ciała zmierzona tym sposobem wynosi $V = 25 \text{ cm}^3$, a masa $M = 200 \text{ g}$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć gęstość tego ciała ?

b) Boki trójkątnego kawałka ziemi zmierzone z dokładnością 1 m wynoszą $a = 250 \text{ m}$, $b = 400 \text{ m}$. Kąt między tymi bokami zmierzony z dokładnością 0,01 rad wynosi $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole tego kawałka ziemi ?

4.3 Pochodne cząstkowe funkcji złożonych

● **Twierdzenie 4.3.1** (o pochodnej funkcji złożonej)

Niech

1. funkcje $x = x(t)$, $y = y(t)$ mają pochodne właściwe w punkcie t_0 ,
2. funkcja $z = f(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $(x(t_0), y(t_0))$.

Wtedy funkcja złożona $F(t) = f(x(t), y(t))$ ma pochodną właściwą w punkcie t_0 oraz

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt},$$

gdzie $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ obliczone są w punkcie t_0 , a pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ odpowiednio w punkcie $(x(t_0), y(t_0))$.

Uwaga. Analogiczna reguła różniczkowania jest prawdziwa także dla funkcji trzech zmiennych.

○ **Ćwiczenie 4.3.2**

Korzystając z reguł różniczkowania funkcji obliczyć pochodne $F'(t)$, $F''(t)$ podanych funkcji złożonych:

- a) $F = f(x, y)$, gdzie $x = \sin t$, $y = \cos t$;
- b) $F = g(x, y, z)$, gdzie $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

● **Twierdzenie 4.3.3** (o pochodnych cząstkowych funkcji złożonej)

Niech

1. funkcje $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ mają pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $(u_0, v_0) \in \mathbf{R}^2$
2. funkcja $z = f(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$.

Wtedy funkcja złożona $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ ma w punkcie (u_0, v_0) pochodne cząstkowe pierwszego rzędu wyrażone wzorami:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v},$$

gdzie pochodne cząstkowe $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ obliczone są w punkcie (u_0, v_0) , a pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ odpowiednio w punkcie $(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$.

Uwaga. Jeżeli f jest funkcją tylko jednej zmiennej, to reguły różniczkowania funkcji złożonej $F(u, v) = f(x(u, v))$ przyjmują postać:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Analogiczne reguły różniczkowania są prawdziwe także dla funkcji trzech zmiennych.

○ **Ćwiczenie 4.3.4**

Korzystając z powyższych wzorów obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial F}{\partial u}$ oraz $\frac{\partial F}{\partial v}$ dla podanych funkcji złożonych:

- a) $F = f(x)$, gdzie $x = e^{\arctg \frac{u}{v}}$;
 b) $F = f(x, y)$, gdzie $x = u \cos v$, $y = u \sin v$;
 c) $F = f(x, y, z)$, gdzie $x = uv$, $y = u + v$, $z = \frac{u}{v}$.

○ **Ćwiczenie 4.3.5**

- a) Obliczyć $z'(x)$, jeżeli $z = F(x, y(x))$;
 b) Obliczyć $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, jeżeli $z = F(x(v), y(u))$;
 c) Obliczyć $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, jeżeli $z = F(t(u, v))$;
 d*) Obliczyć $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$, jeżeli $z = F(x(u, v), y(u, v))$.

4.4 Pochodna kierunkowa funkcji

● **Definicja 4.4.1** (pochodna kierunkowa funkcji)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, y_0)$. Ponadto niech $\vec{v} = (v_x, v_y)$ będzie danym wersorem. Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku wersora \vec{v} określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Uwaga. Analogicznie określa się pochodną kierunkową dla funkcji trzech zmiennych. Pochodna kierunkowa jest przeniesieniem na funkcje wielu zmiennych pojęcia pochodnej jednostronnej funkcji jednej zmiennej. Niektórzy autorzy przyjmują, że w definicji pochodnej kierunkowej t dąży do 0 z obu stron. Pochodna kierunkowa jest wtedy uogólnieniem pojęcia pochodnej cząstkowej funkcji. Np. dla funkcji f dwóch zmiennych oraz dla wersorów $\vec{v} = (1, 0)$ i $\vec{u} = (0, 1)$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

○ **Ćwiczenie 4.4.2**

Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach dla wymienionych wersorów:

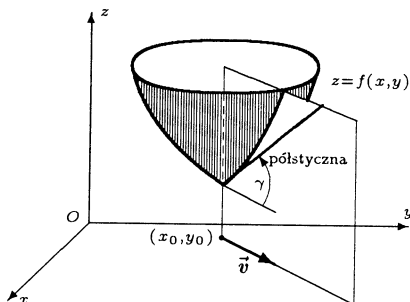
- a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\vec{v} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$;
 b) $f(x, y) = xy$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
 c) $f(x, y, z) = x^2 - 2yz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

● **Fakt 4.4.3** (interpretacja geometryczna pochodnej kierunkowej)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f będzie określona na otoczeniu $O(x_0, y_0)$. Ponadto niech γ oznacza kąt nachylenia do płaszczyzny xOy półstycznej do krzywej otrzymanej w wyniku przekroju wykresu funkcji f półpłaszczyzną przechodzącą przez prostą $x = x_0$, $y = y_0$ oraz równoległą do wektora \vec{v} . Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \gamma.$$

Pochodna kierunkowa określa szybkość zmiany wartości funkcji f w kierunku \vec{v} .



Rys. 4.4.1. Interpretacja geometryczna pochodnej kierunkowej funkcji.

● **Definicja 4.4.4** (gradient funkcji)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Gradientem funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy wektor określony wzorem:

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Gradient funkcji f oznaczamy także krótko przez $\operatorname{grad} f$. Analogicznie określa się gradient dla funkcji trzech zmiennych.

○ **Ćwiczenie 4.4.5**

Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x, y) = x^3 + y^3$, $(x_0, y_0) = (-1, 1)$;

b) $f(x, y) = \sin\left(\pi\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $(x_0, y_0) = (3, 4)$;

c) $f(x, y, z) = \frac{xy^2}{z^3}$, $(x_0, y_0, z_0) = (16, -3, 2)$.

● **Twierdzenie 4.4.6** (wzór do obliczania pochodnej kierunkowej)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, y_0)$. Ponadto niech pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ będą ciągłe w punkcie (x_0, y_0) . Wtedy

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \operatorname{grad} f(x_0, y_0) \circ \vec{v},$$

gdzie \vec{v} jest dowolnym wektorem na płaszczyźnie.

Uwaga. Podobny wzór jest prawdziwy także dla funkcji trzech zmiennych.

○ **Ćwiczenie 4.4.7**

Korzystając z powyższego wzoru obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

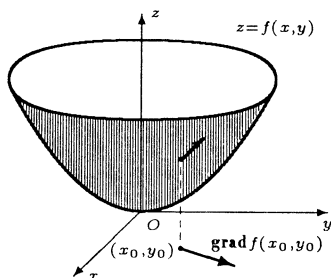
a) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

b) $f(x, y) = e^{x+y}$, $(x_0, y_0) = (1, -1)$, $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

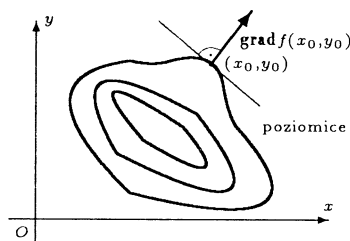
c) $f(x, y, z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$, $(x_0, y_0, z_0) = (3, 4, 5)$, $\vec{v} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

● **Fakt 4.4.8** (*interpretacja geometryczna gradientu*)

1. Gradient funkcji w punkcie wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji w tym punkcie.
2. Gradient funkcji w punkcie jest prostopadły do poziomic funkcji przechodzącej przez ten punkt.



Rys. 4.4.2. Gradient wskazuje kierunek najszybszego wzrostu funkcji w punkcie.



Rys. 4.4.3. Gradient funkcji jest prostopadły do poziomic.

○ **Ćwiczenie 4.4.9**

a) Temperatura w zbiorze $V = \{(x, y, z) : 0 < x, y, z < \pi\}$ jest określona wzorem:

$$T(x, y, z) = 10 \cos(x - y) + 20 \sin(x + z).$$

W punkcie $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ znaleźć kierunek najszybszego wzrostu temperatury;

b) Sprawdzić bezpośrednio, że gradient funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ jest prostopadły do jej poziomic.

4.5 Wzór Taylora. Ekstrema funkcji

● **Definicja 4.5.1** (*różniczka n-tego rzędu funkcji dwóch zmiennych*)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f ma na otoczeniu $O(x_0, y_0)$ ciągle pochodne cząstkowe do rzędu $n \in \mathbf{N}$ włącznie. Różniczką n -tego rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy funkcję $d^n f(x_0, y_0)$ zmiennych Δx i Δy określoną

wzorem:

$$d^n f(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) \stackrel{def}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^n f \Big|_{(x_0, y_0)}.$$

We wzorze tym symbole $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ oznaczają operacje różniczkowania po zmiennych x i y , natomiast potęgę traktujemy formalnie do otrzymania pochodnych cząstkowych wyższych rzędów. Różniczkę n -tego rzędu funkcji f oznaczamy krótko przez $d^n f$. Dodatkowo przyjmujemy, że $d^0 f \stackrel{def}{=} f$.

○ **Ćwiczenie 4.5.2**

Napisać wzory określające różniczki drugiego, trzeciego i czwartego rzędu dla funkcji dwóch zmiennych.

● **Twierdzenie 4.5.3** (*wzór Taylora*)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f ma na otoczeniu $O(x_0, y_0)$ ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu $n \geq 1$ włącznie oraz niech $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in O(x_0, y_0)$. Wtedy

$$\begin{aligned} \bigvee_{0 < \Theta < 1} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + \frac{df(x_0, y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + \dots + \\ &+ \frac{d^{n-1} f(x_0, y_0)}{(n-1)!} + \frac{d^n f(x_0 + \Theta \Delta x, y_0 + \Theta \Delta y)}{n!}. \end{aligned}$$

Uwaga. Równość podaną w tezie twierdzenia nazywamy wzorem Taylora dla funkcji dwóch zmiennych. Ostatni składnik we wzorze Taylora nazywamy n -tą resztą tego wzoru i oznaczamy przez R_n . Dla punktu $(x_0, y_0) = (0, 0)$ powyższą równość nazywamy wzorem Maclaurina.

○ **Ćwiczenie 4.5.4**

Napisać rozwiniętą postać wzoru Taylora dla funkcji dwóch zmiennych oraz dla:

a) $n = 2$; b) $n = 3$.

○ **Ćwiczenie 4.5.5**

Napisać wzory Taylora z resztą R_n dla podanych funkcji na otoczeniach wskazanych punktów, jeżeli:

a) $f(x, y) = x^2 y$, $n = 2$, $(x_0, y_0) = (-1, 1)$;

b) $f(x, y) = x \sin y$, $n = 3$, $(x_0, y_0) = (0, \pi)$;

c) $f(x, y) = e^{x+2y}$, $n = 3$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

● **Definicja 4.5.6** (*ekstrema lokalne i wartości ekstremalne funkcji dwóch zmiennych*)

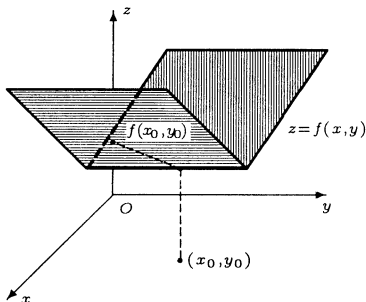
Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu O_{x_0, y_0} . Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne, jeżeli

$$\bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{(x, y)} \left[\left((x, y) \in S((x_0, y_0), \delta) \right) \implies \left(f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \right) \right].$$

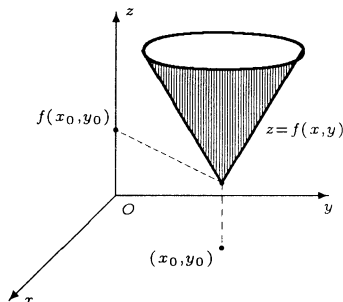
Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne właściwe, jeżeli

$$\bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{(x, y)} \left[\left((x, y) \in S((x_0, y_0), \delta) \right) \implies \left(f(x, y) > f(x_0, y_0) \right) \right].$$

Uwaga. Analogicznie określa się maksimum lokalne, maksimum lokalne właściwe.



Rys. 4.5.1. Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne.



Rys. 4.5.2. Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne właściwe.

○ Ćwiczenie 4.5.7

Korzystając z definicji zbadać, czy podane funkcje mają ekstrema lokalne we wskazanych punktach:

- a) $f(x, y) = 5 - (x^6 + y^4)$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$; b) $f(x, y) = x^2 - 2y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$;
 c) $f(x, y) = 5|x| + |y + 1|$, $(x_0, y_0) = (0, -1)$; d) $f(x, y) = \operatorname{ch} y$, $(x_0, y_0) = (3, 0)$.

● Definicja 4.5.8 (wartość najmniejsza funkcji na zbiorze)

Liczba m jest najmniejszą wartością funkcji f na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli

$$\bigvee_{(x_0, y_0) \in A} f(x_0, y_0) = m \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{(x, y) \in A} f(x, y) \geq f(x_0, y_0).$$

Uwaga. Analogicznie określa się wartość największą funkcji na zbiorze.

○ Ćwiczenie 4.5.9

Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje przyjmują wartości ekstremalne na zbiorach we wskazanych punktach:

- a) $f(x, y) = 2x^4 + 5y^4$, $A = \mathbf{R}^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$;
 b) $f(x, y) = \sin^2 x \cos y$, $A = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \times \left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right]$, $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$.

● Twierdzenie 4.5.10 (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f będzie określona na otoczeniu $O((x_0, y_0))$. Wówczas, jeżeli

1. funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie (x_0, y_0) ,
2. istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$,

to

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Uwaga. Z twierdzenia tego wynika, że funkcja może mieć ekstrema tylko w punktach, w których wszystkie jej pochodne cząstkowe są równe 0 albo w punktach, w których choć jedna z pochodnych cząstkowych nie istnieje.

Zerowanie się w punkcie obu pochodnych cząstkowych nie gwarantuje jeszcze istnienia ekstremum lokalnego. Np. funkcja $f(x, y) = -x^3$ spełnia równości

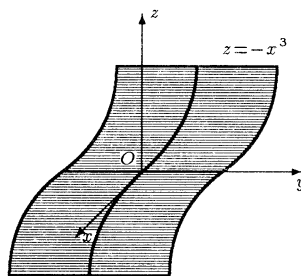
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

ale nie ma ekstremum w punkcie $(0, 0)$.

○ Ćwiczenie 4.5.11

Sprawdzić, że podane funkcje spełniają we wskazanych punktach warunek konieczny istnienia ekstremum, ale nie mają w tych punktach ekstremów lokalnych:

- $f(x, y) = x^3 + y^3$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$;
- $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$.



Rys. 4.5.3.

● Twierdzenie 4.5.12 (warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Niech $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, y_0)$. Ponadto niech

- funkcja f ma ciągle pochodne cząstkowe rzędu drugiego na otoczeniu $O(x_0, y_0)$,
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$,
- $\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0$.

Wtedy funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie (x_0, y_0) i jest to:

- minimum lokalne właściwe, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ albo
- maksimum lokalne właściwe, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$.

Uwaga. Gdy wyznacznik w założeniu 3. powyższego twierdzenia jest ujemny, to funkcja f nie ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalnego. Natomiast, gdy wyznacznik ten jest równy 0, to badanie, czy funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie (x_0, y_0) przeprowadzamy innymi metodami (np. korzystając z definicji).

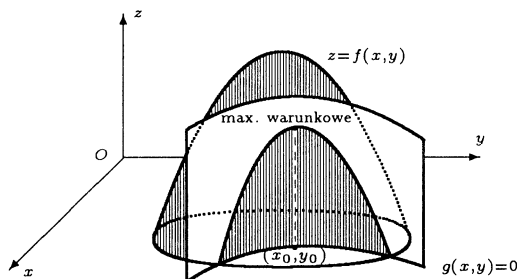
○ **Ćwiczenie 4.5.13**

Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji dwóch zmiennych:

- a) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$; b) $f(x, y) = xy(1-x-y)$;
 c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$; d) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$;
 e) $f(x, y) = (y-x)^2 + (y+2)^3$; f) $f(x, y) = x^4 - y^4$.

● **Definicja 4.5.14** (*ekstrema warunkowe funkcji*)

Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne właściwe przy warunku $g(x, y) = 0$, gdy $g(x_0, y_0) = 0$ oraz istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ dla każdego punktu $(x, y) \in S((x_0, y_0), \delta)$ spełniającego warunek $g(x, y) = 0$.



Rys. 4.5.4. Funkcja f osiąga w punkcie (x_0, y_0) maksimum przy warunku $g(x, y) = 0$.

● **Fakt 4.5.15** (*algorytm znajdowania ekstremów warunkowych*)

Ekstrema lokalne funkcji f dwóch zmiennych z warunkiem $g(x, y) = 0$ znajdujemy według algorytmu:

1. krzywą $\Gamma : g(x, y) = 0$ dzielimy na łuki, które są wykresami funkcji postaci $y = h(x)$, gdzie $x \in I$ lub postaci $x = p(y)$, gdzie $y \in J$,
2. szukamy ekstremów funkcji jednej zmiennej $f(x, h(x))$ na przedziale I lub funkcji $f(p(y), y)$ na przedziale J ,
3. porównujemy wartości otrzymanych ekstremów na krzywej Γ i ustalamy ekstrema warunkowe.

○ **Ćwiczenie 4.5.16**

Znaleźć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają wskazane warunki:

- a) $f(x, y) = xy, x + y = 0$; b) $f(x, y) = x^2 + y^2, xy = 4$;
 c*) $f(x, y) = x^4 + y^4, x^2 + y^2 = 9$; d*) $f(x, y) = x^2 + y^2, 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$.

● **Fakt 4.5.17** (*algorytm znajdowania wartości ekstremalnych na obszarze domkniętym*)

Wartości najmniejszą i największą funkcji na ograniczonym obszarze domkniętym znajdujemy w następujący sposób:

1. szukamy ekstremów lokalnych tej funkcji na obszarze otwartym,
2. szukamy ekstremów lokalnych tej funkcji na brzegu obszaru,
3. porównujemy wartości otrzymanych ekstremów we wnętrzu i na brzegu obszaru oraz na tej podstawie ustalamy wartości najmniejszą i największą funkcji na obszarze.

○ **Ćwiczenie 4.5.18**

Znaleźć wartości największe i najmniejsze podanych funkcji na wskazanych obszarach domkniętych:

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$;

b) $f(x, y) = x^2y$, $x^2 + y^2 \leq 1$;

c) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$;

d*) $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 6y$, $|x| + |y| \leq 4$.

4.6 Zastosowania ekstremów funkcji w geometrii, fizyce i technice

○ **Ćwiczenie 4.6.1**

a) Obliczyć odległość początku układu współrzędnych od płaszczyzny

$$\pi : x - 2y + 3z - 6 = 0;$$

b) Obliczyć odległość prostych skośnych

$$l : \frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}, \quad k : \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1};$$

c) Znaleźć wymiary prostopadłościanu o objętości V , który ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej;d*) Przekrój poprzeczny kanału ma mieć kształt trapezu równoramiennego o polu $S = 100 \text{ m}^2$. Brzegi i dno kanału wyklada się płytami. Znaleźć wymiary kanału, którego koszt budowy będzie najmniejszy;e) W punktach $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (1, 0)$, $A_3 = (2, 3)$ płaszczyzny xOy umieszczone są masy $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$. Znaleźć oś prostopadłą do płaszczyzny xOy , względem której moment bezwładności podanego układu mas będzie najmniejszy.

4.7 Funkcje uwikłane

● **Definicja 4.7.1** (*funkcje uwikłane*)

Funkcją uwikłaną określoną przez warunek

$$F(x, y) = 0$$

nazywamy każdą funkcję $y = y(x)$ spełniającą równość

$$F(x, y(x)) = 0$$

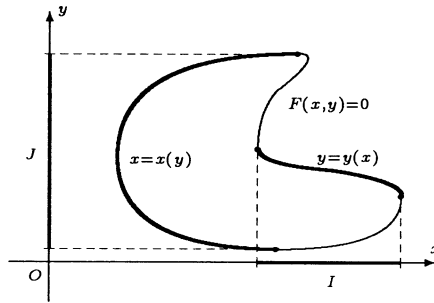
dla wszystkich x z pewnego przedziału I . Podobnie określa się funkcję uwikłaną postaci $x = x(y)$, gdzie $y \in J$.

○ **Ćwiczenie 4.7.2**

Naszukować wykresy wszystkich uwikłanych funkcji ciągłych postaci $y = y(x)$, które są określone przez warunki:

a) $x^2 + y^2 = 4$; b) $x^3 - y^3 = 0$; c) $\sin x = \cos y$;

d*) $x^y = y^x$; e*) $x^x = y^y$; f) $x^7 + 3x^5 + x = y^7 + 3y^5 + y$.



Rys. 4.7.1. Funkcje uwikłane $y = y(x)$, $x \in I$ oraz $x = x(y)$, $y \in J$, określone przez warunek $F(x, y) = 0$.

● **Twierdzenie 4.7.3** (o istnieniu i różniczkowalności funkcji uwikłanej)

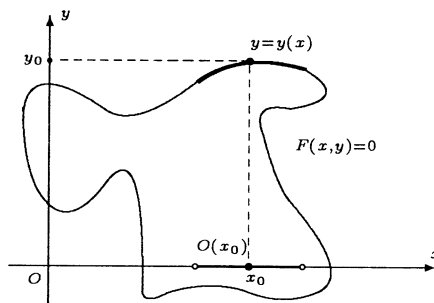
Niech $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ oraz niech funkcja F będzie określona na otoczeniu $O(x_0, y_0)$. Ponadto niech

1. pochodne cząstkowe $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ są ciągłe na tym otoczeniu,
2. $F(x_0, y_0) = 0$ oraz $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Wtedy na pewnym otoczeniu $O(x_0)$ istnieje jednoznacznie określona funkcja uwikłana $y = y(x)$ spełniająca warunki:

- a) $F(x, y(x)) = 0$ dla każdego $x \in O(x_0)$,
- b) $y(x_0) = y_0$,

c)
$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}$$
 dla każdego $x \in O(x_0)$.



Rys. 4.7.2. Ilustracja do twierdzenia o istnieniu i różniczkowalności funkcji uwikłanej.

Uwaga. Jeżeli funkcja F ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu na otoczeniu $O(x_0, y_0)$ oraz spełnia warunki:

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

to funkcja uwikłana $y = y(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna na pewnym otoczeniu punktu x_0 .

○ **Ćwiczenie 4.7.4**

Zbadać, czy podane równania określają jednoznacznie ciągłą funkcję uwikłaną postaci $y = y(x)$ lub $x = x(y)$ na pewnych otoczeniach wskazanych punktów:

a) $x = \cos y$, $A = (1, 0)$, $B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$;

b) $x^2 - 2y - 1 = 0$, $A = (\sqrt{3}, 1)$, $B = (3, 3)$;

c) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 1$, $A = (3, 2)$, $B = (0, -1)$.

○ **Ćwiczenie 4.7.5**

Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych przez równania:

a) $y - \sin y + x^2 = 0$; b) $y^2 - \arctg y - e^x = 0$.

○ **Ćwiczenie 4.7.6**

Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach tych krzywych:

a) $x + x^3 = y^3 + y^5$, $A = (1, 1)$; b) $2 + x^3 + y^3 = e^x + e^y$, $A = (0, 0)$.

● **Twierdzenie 4.7.7** (o ekstremach lokalnych funkcji uwikłanej)

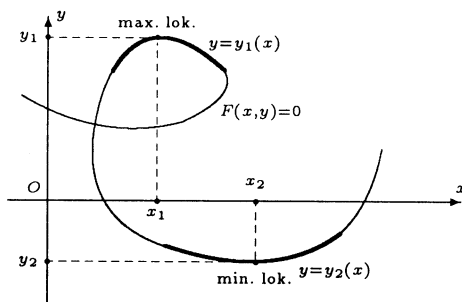
Niech funkcja F będzie określona na otoczeniu $O(x_0, y_0)$ i niech ma tam ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego. Ponadto niech

1. $F(x_0, y_0) = 0$,

2. $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

3. $A = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \neq 0$.

Wtedy funkcja uwikłana $y = y(x)$ określona przez równanie $F(x, y) = 0$ ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe i jest to:

a) minimum, gdy $A > 0$ albob) maksimum, gdy $A < 0$.

Rys. 4.7.3. Funkcja uwikłana $y = y_1(x)$, określona przez warunek $F(x, y) = 0$, ma w punkcie x_1 maksimum lokalne właściwe, a funkcja $y = y_2(x)$ ma w punkcie x_2 minimum lokalne właściwe.

Uwaga. Równość $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ jest warunkiem koniecznym, a nierówność $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \neq 0$ warunkiem wystarczającym istnienia ekstremum funkcji uwikłanej. Prawdziwe jest także analogiczne twierdzenie o ekstremach funkcji uwikłanej postaci $x = x(y)$.

● **Fakt 4.7.8** (*algorytm znajdowania ekstremów lokalnych funkcji uwikłanej*)

1. Punkty, w których funkcja uwikłana może mieć ekstrema lokalne, znajdujemy korzystając z warunku koniecznego istnienia ekstremum. W tym celu rozwiązujemy układ warunków:

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0.$$

2. W otrzymanych punktach (x_0, y_0) sprawdzamy warunek wystarczający istnienia ekstremum, tj. badamy, czy zachodzi warunek

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \neq 0.$$

Na podstawie znaku ostatniego wyrażenia ustalamy rodzaj ekstremum.

○ **Ćwiczenie 4.7.9**

Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanych postaci $y = y(x)$ określonych przez podane warunki:

a) $x^3 + y^3 - 8xy = 0$; b) $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$; c) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.

5

Całki podwójne

5.1 Całki podwójne po prostokącie

Oznaczenia w definicji całki po prostokącie:

$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ – prostokąt na płaszczyźnie;

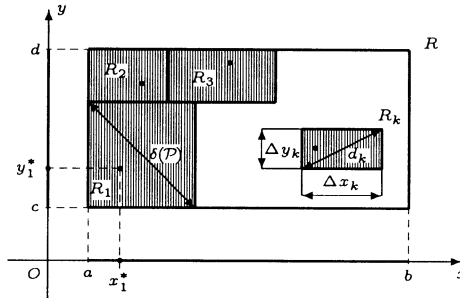
$\mathcal{P} = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ – podział prostokąta R na prostokąty R_k , gdzie $1 \leq k \leq n$; prostokąty podziału całkowicie wypełniają prostokąt i mają parami rozłączne wnętrza;

$\Delta x_k, \Delta y_k$ – wymiary prostokąta R_k , gdzie $1 \leq k \leq n$;

$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ – długość przekątnej prostokąta R_k , gdzie $1 \leq k \leq n$;

$\delta(\mathcal{P}) = \max\{d_k : 1 \leq k \leq n\}$ – średnica podziału \mathcal{P} ,

$\Xi = \{(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), \dots, (x_n^*, y_n^*)\}$, gdzie $(x_k^*, y_k^*) \in R_k$ dla $1 \leq k \leq n$ – zbiór punktów pośrednich podziału \mathcal{P} .



Rys. 5.1.1. Podział \mathcal{P} prostokąta $R = [a, b] \times [c, d]$.

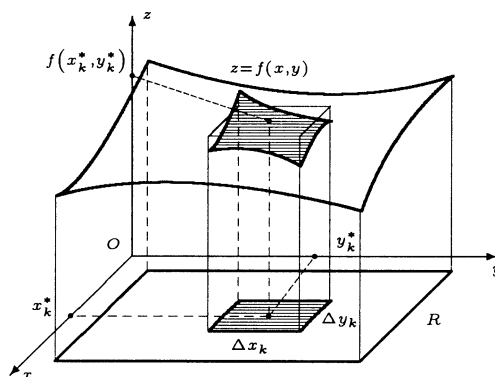
● **Definicja 5.1.1** (całka podwójna po prostokącie)

Niech funkcja f będzie ograniczona na prostokącie R . Całkę podwójną z funkcji f po prostokącie R definiujemy wzorem:

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) (\Delta x_k) (\Delta y_k),$$

o ile granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa i nie zależy od sposobów podziału \mathcal{P} prostokąta R , ani od sposobów wyboru punktów pośrednich Ξ . Mówimy wtedy, że funkcja f jest całkowalna na prostokącie R .

Uwaga. Całkę podwójną z funkcji f po prostokącie R oznaczamy też symbolem $\iint_R f(x, y) dP$. Całka podwójna po prostokącie jest naturalnym uogólnieniem całki z funkcji jednej zmiennej po przedziale.



Rys. 5.1.2. Ilustracja do definicji całki podwójnej z funkcji f po prostokącie R .

● **Fakt 5.1.2** (o całkowalności funkcji ciągłych)

Funkcja ciągła na prostokącie jest na nim całkowalna.

● **Twierdzenie 5.1.3** (o liniowości całki)

Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na prostokącie R oraz $c \in \mathbf{R}$, to:

a) funkcja $f + g$ jest całkowalna na prostokącie R oraz

$$\iint_R (f(x, y) + g(x, y)) dP = \iint_R f(x, y) dP + \iint_R g(x, y) dP;$$

b) funkcja cf jest całkowalna na prostokącie R oraz

$$\iint_R cf(x, y) dP = c \iint_R f(x, y) dP.$$

● **Twierdzenie 5.1.4** (o addytywności całki względem obszaru całkowania)

Niech funkcja f będzie całkowalna na prostokącie R . Wtedy dla dowolnego podziału prostokąta R na prostokąty R_1, R_2 o rozłącznych wnętrzach funkcja f jest całkowalna na tych prostokątach oraz

$$\iint_R f(x, y) dP = \iint_{R_1} f(x, y) dP + \iint_{R_2} f(x, y) dP.$$

● **Twierdzenie 5.1.5** (o zamianie całki podwójnej na całki iterowane)

Niech funkcja f będzie ciągła na prostokącie $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Wtedy

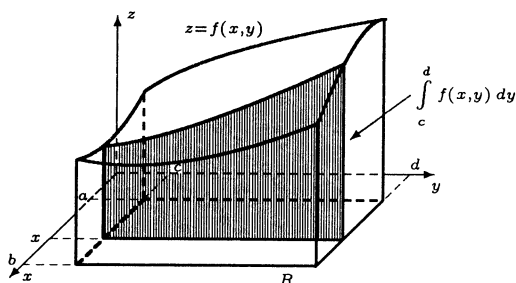
$$\iint_R f(x, y) dP = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Uwaga. Całki występujące w tezie powyższego twierdzenia nazywamy krótko całkami iterowanymi funkcji f po prostokącie R . Będziemy pisali umownie

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad \text{i} \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx,$$

zamiast odpowiednio

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad \text{i} \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$



Rys. 5.1.3. Ilustracja całki iterowanej $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$.

○ **Ćwiczenie 5.1.6**

Obliczyć podane całki iterowane:

a) $\int_1^2 dx \int_0^3 (x + y^2 x) dy, \quad \int_0^3 dy \int_1^2 (x + y^2 x) dx;$

b) $\int_1^4 dx \int_1^4 (x^2 + y^2 x) dy, \quad \int_1^4 dy \int_1^4 (x^2 + y^2 x) dx;$

c) $\int_0^{\ln 4} dx \int_0^{\ln 3} e^{x+y} dy, \quad \int_0^{\ln 3} dy \int_0^{\ln 4} e^{x+y} dx.$

○ **Ćwiczenie 5.1.7**

Obliczyć podane całki podwójne po wskazanych prostokątach:

$$a) \iint_R xy^2 dx dy, R = [0, 1] \times [-1, 1];$$

$$b) \iint_R \sin(x+y) dx dy, R = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right];$$

$$c) \iint_R \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dx dy, R = [0, 1] \times [0, 1].$$

● **Fakt 5.1.8** (całka podwójna z funkcji o rozdzielonych zmiennych)

Jeżeli

1. funkcja g jest ciągła na przedziale $[a, b]$,
2. funkcja h jest ciągła na przedziale $[c, d]$,

to

$$\iint_R g(x)h(y) dP = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d h(y) dy \right),$$

gdzie $R = [a, b] \times [c, d]$.

○ **Ćwiczenie 5.1.9**

Podane całki zamienić na sumy i iloczyny całek pojedynczych:

$$a) \iint_R \cos(x+y) dx dy, R = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right];$$

$$b) \iint_R e^{x+y} dx dy, R = [0, 1] \times [0, 1];$$

$$c) \iint_R xy(x+y) dx dy, R = [-1, 1] \times [-1, 1].$$

5.2 Całki podwójne po obszarach normalnych

● **Definicja 5.2.1** (całka podwójna po obszarze)

Niech f będzie funkcją określoną i ograniczoną na obszarze ograniczonym $D \subset \mathbf{R}^2$ oraz niech R będzie dowolnym prostokątem zawierającym obszar D . Ponadto niech f^* oznacza rozszerzenie funkcji f na R określone wzorem:

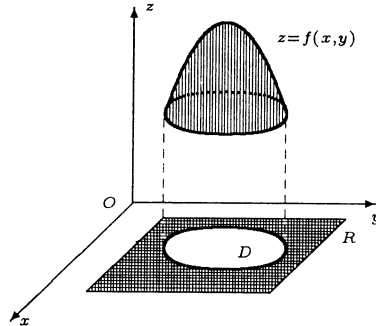
$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{dla } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{dla } (x, y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Całkę podwójną funkcji f po obszarze D definiujemy wzorem:

$$\iint_D f(x, y) dP \stackrel{\text{def}}{=} \iint_R f^*(x, y) dP,$$

o ile całka po prawej stronie znaku równości istnieje. Mówimy wtedy, że funkcja f jest całkowna na obszarze D .

Uwaga. Całka $\iint_R f^*(x, y) dP$ nie zależy od wyboru prostokąta R .



Rys. 5.2.1. Ilustracja do definicji całki podwójnej z funkcji f po obszarze D .

● **Definicja 5.2.2** (obszary normalne względem osi układu)

a) Obszarem normalnym względem osi Ox nazywamy obszar domknięty postaci:

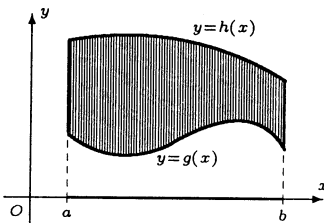
$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

gdzie funkcje g i h są ciągłe na $[a, b]$ oraz $g(x) < h(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$.

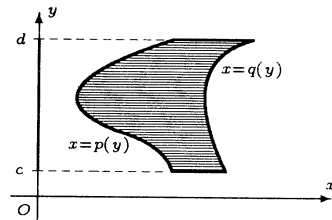
b) Obszarem normalnym względem osi Oy nazywamy obszar domknięty postaci:

$$\{(x, y) : c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq q(y)\},$$

gdzie funkcje p i q są ciągłe na $[c, d]$ oraz $p(y) < q(y)$ dla każdego $y \in (c, d)$.



Rys. 5.2.2. Obszar normalny względem osi Ox .



Rys. 5.2.3. Obszar normalny względem osi Oy .

○ **Ćwiczenie 5.2.3**

Zbadać, który z obszarów ograniczonych podanymi krzywymi jest normalny względem osi Ox , a który względem osi Oy . Naszkicować te obszary.

a) $y = 0$, $x = 2$, $y = x^2$;

b) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;

c) $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $y = 2x$ ($x > 0$);

d) $x^2 + y^2 = 1$;

e) $y = -1$, $y = 1$, $x = 2 - \sqrt{1 - y^2}$, $x = \sqrt{1 - y^2} - 1$;

f) $y = |\sin x|$, $y = -1$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

● **Twierdzenie 5.2.4** (całki iterowane po obszarach normalnych)

a) Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze normalnym

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

to

$$\iint_D f(x, y) dP = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

b) Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze normalnym

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq q(y)\},$$

to

$$\iint_D f(x, y) dP = \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Uwaga. Całki iterowane:

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx, \quad \int_c^d \left(\int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

będziemy zapisywali umownie odpowiednio w postaci:

$$\int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy, \quad \int_c^d dy \int_{p(y)}^{q(y)} f(x, y) dx.$$

○ **Ćwiczenie 5.2.5**

Zamienić całkę podwójną $\iint_D f(x, y) dP$ na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony

jest podanymi krzywymi:

a) $y = 1 + \sqrt{2x - x^2}$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$;

b) $y = x$, $xy = 1$, $y = \frac{1}{2}$;

c) $yx^2 = 1$, $y = 1$, $y = 2$;

d) $y = |x - 1|$, $y = 2 - |x - 1|$;

e) $x = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sqrt{x}$, ($y \geq 0$);

f) $x = y^2$, $y = x - 2$.

○ **Ćwiczenie 5.2.6**

Obliczyć podane całki podwójne:

a) $\iint_D (x^2 - xy) dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq x, y \leq 3x - x^2\}$;

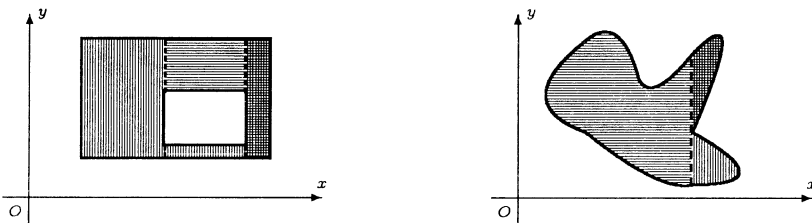
b) $\iint_D (3x - 2y) dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

c) $\iint_D xy dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq 6 - x, y \geq \sqrt{x}, x \geq 0\}$;

$$d) \iint_D y \, dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq \arcsin y, \quad y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x \geq 0 \right\}.$$

● **Definicja 5.2.7** (obszar regularny na płaszczyźnie)

Sumę skończonej liczby obszarów normalnych (względem osi Ox lub Oy) o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy obszarem regularnym na płaszczyźnie.



Rys. 5.2.4. Przykłady podziałów obszarów regularnych na obszary normalne względem osi Ox .

● **Fakt 5.2.8** (całka po obszarze regularnym)

Niech obszar regularny D będzie sumą obszarów normalnych D_1, D_2, \dots, D_n o parami rozłącznych wnętrzach oraz niech funkcja f będzie całkowalna na obszarze D . Wtedy

$$\iint_D f(x, y) \, dP = \iint_{D_1} f(x, y) \, dP + \iint_{D_2} f(x, y) \, dP + \dots + \iint_{D_n} f(x, y) \, dP.$$

Uwaga. Całki po obszarach regularnych mają te same własności, co całki po prostokątach (liniowość, addytywność względem obszaru całkowania).

○ **Ćwiczenie 5.2.9**

Obliczyć podane całki podwójne po zbiorach ograniczonych wskazanymi krzywymi:

a) $\iint_D xy \, dx dy, \quad D : xy = 1, \quad |x - y| = 1;$

b) $\iint_D (x + y) \, dx dy, \quad D : y = \sqrt{|x|}, \quad 2y = |x|, \quad |x| = 1;$

c) $\iint_D y \, dx dy, \quad D : y = 2 - x^2, \quad y = -1, \quad y = 1, \quad x = 1 - \sqrt{1 - y^2}.$

● **Definicja 5.2.10** (całka podwójna z funkcji wektorowej)

Niech funkcje F_1, F_2 będą całkowalne na obszarze regularnym $D \subset \mathbf{R}^2$. Całkę z funkcji wektorowej $\vec{F} = (F_1, F_2)$ po obszarze D określamy wzorem:

$$\iint_D \vec{F}(x, y) \, dP \stackrel{\text{def}}{=} \left(\iint_D F_1(x, y) \, dP, \iint_D F_2(x, y) \, dP \right).$$

Uwaga. Podobnie określa się całkę po obszarze D z funkcji wektorowej postaci:

$$\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y), F_3(x, y)).$$

● **Twierdzenie 5.2.11** (o całkowaniu funkcji nieciągłych)

Jeżeli

1. funkcja f jest całkowna na obszarze regularnym D ,
2. funkcja ograniczona g pokrywa się z funkcją f poza skończoną liczbą krzywych, które są wykresami funkcji ciągłych postaci $y = y(x)$ lub $x = x(y)$,

to

funkcja g jest całkowna na D oraz

$$\iint_D g(x, y) dP = \iint_D f(x, y) dP.$$

○ **Ćwiczenie 5.2.12**

Korzystając z powyższego twierdzenia obliczyć podane całki podwójne:

a) $\iint_D E(\sin(x+y)) dx dy, D = [0, \pi] \times [0, \pi];$

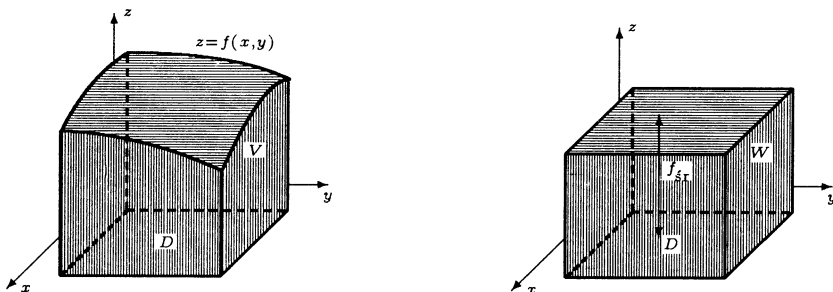
b) $\iint_D \operatorname{sgn}(y-x^2) dx dy, D = [0, 2] \times [0, 2].$

● **Definicja 5.2.13** (wartość średnia funkcji na obszarze)

Wartością średnią funkcji f na obszarze D nazywamy liczbę:

$$f_{sr} \stackrel{def}{=} \frac{1}{|D|} \iint_D f(x, y) dP,$$

gdzie $|D|$ oznacza pole obszaru D .



Rys. 5.2.5. Wartość średnia funkcji f na obszarze D jest równa wysokości walca W o podstawie D , który ma tę samą objętość co bryła V .

○ **Ćwiczenie 5.2.14**

Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych obszarach:

a) $f(x, y) = x$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$;

b) $f(x, y) = \sin(x + y)$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

- **Twierdzenie 5.2.15** (o wartości średniej dla całek podwójnych)
Niech funkcja f będzie ciągła na obszarze normalnym D . Wtedy

$$\int_{(x_0, y_0) \in D} f_{sr} = f(x_0, y_0).$$

- **Ćwiczenie 5.2.16** (interpretacja geometryczna i fizyczna całki podwójnej)

- a) Wyprowadzić wzór na objętość bryły V ograniczonej wykresem funkcji nieujemnej $z = f(x, y)$, gdzie $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ oraz płaszczyznę $z = 0$;
b) Wyprowadzić wzór na całkowity ładunek elektryczny Q obszaru płaskiego D o gęstości powierzchniowej ładunku $\sigma = \sigma(x, y)$;
c) Wyprowadzić wzór na siłę \vec{F} przyciągania grawitacyjnego masy m umieszczonej w punkcie \vec{r}_0 przez masę rozłożoną na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$ z gęstością powierzchniową $\sigma = \sigma(x, y)$.

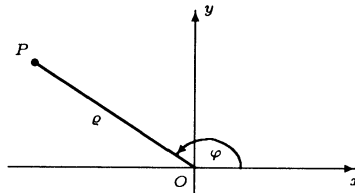
5.3 Zamiana zmiennych w całkach podwójnych

- **Definicja 5.3.1** (współrzędne biegunowe)

Położenie punktu P na płaszczyźnie można opisać parą liczb (φ, ρ) , gdzie:

φ – oznacza miarę kąta między dodatnią częścią osi Ox a promieniem wodzącym punktu P , $0 \leq \varphi < 2\pi$ albo $-\pi < \varphi \leq \pi$;

ρ – oznacza odległość punktu P od początku układu współrzędnych, $0 \leq \rho < \infty$.



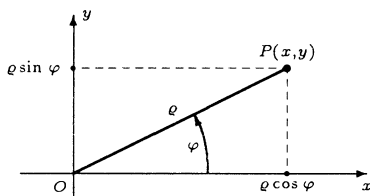
Rys. 5.3.1. Współrzędne biegunowe punktu na płaszczyźnie.

- **Fakt 5.3.2** (zależność między współzrędnymi biegunowymi i kartezjańskimi)

Współzrędnne kartezjańskie (x, y) punktu płaszczyzny danego we współzrędnnych biegunowych (φ, ρ) określone są wzorami:

$$\mathcal{B} : \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Uwaga. Przekształcenie \mathcal{B} , które punktowi (φ, ρ) przyporządkowuje punkt (x, y) określony powyższymi wzorami, nazywamy przekształceniem biegunowym.



Rys. 5.3.2. Ilustracja do wzorów na przejście od współrzędnych biegunowych do kartezjańskich.

○ Ćwiczenie 5.3.3

Opisać we współrzędnych biegunowych podane obszary:

- koło o środku w początku układu i promieniu $r > 0$;
- wycinek kołowy o środku w początku układu i o promieniu r , ograniczony promieniami koła tworzącymi kąty α i β , gdzie $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$, z dodatnią częścią osi Ox ;
- pierścieni kołowy o środku w początku układu, promieniu wewnętrznym r_1 i zewnętrznym r_2 , gdzie $0 < r_1 < r_2$;
- wycinek pierścienia kołowego o środku w początku układu, promieniu wewnętrznym r_1 , zewnętrznym r_2 , gdzie $0 < r_1 < r_2$, ograniczony promieniami koła tworzącymi kąty α i β , gdzie $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$, z dodatnią częścią osi Ox ;
- koło o środku w punkcie $(r, 0)$ i promieniu r , gdzie $r > 0$;
- koło o środku w punkcie $(0, r)$ i promieniu r , gdzie $r > 0$.

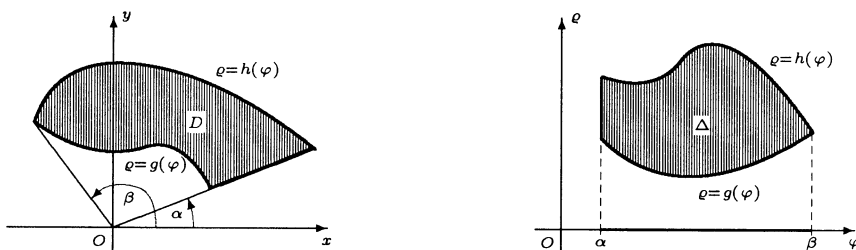
● Twierdzenie 5.3.4 (współrzędne biegunowe w całce podwójnej)

Niech

- obszar Δ we współrzędnych biegunowych będzie obszarem normalnym,
- funkcja f będzie ciągła na obszarze D , który jest obrazem obszaru Δ przy przekształceniu biegunowym; $D = \mathcal{B}(\Delta)$.

Wtedy

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$



Rys. 5.3.3. Ilustracja do twierdzenia o zamianie zmiennych na współrzędne biegunowe w całce podwójnej.

Uwaga. Jeżeli we współrzędnych biegunowych obszar Δ ma postać:

$$\Delta = \{(\varphi, \rho) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, g(\varphi) \leq \rho \leq h(\varphi)\},$$

gdzie funkcje nieujemne g i h są ciągłe na przedziale $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$, to

$$\iint_{\Delta} f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) \varrho d\varrho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{g(\varphi)}^{h(\varphi)} f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi) \varrho d\varrho.$$

Współrzędne biegunowe stosujemy głównie wtedy, gdy obszar całkowania jest ograniczony łukami okręgów o środku w początku układu oraz odcinkami prostych przechodzących przez początek układu.

○ Ćwiczenie 5.3.5

Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po obszarach ograniczonych wskazanymi krzywymi:

a) $\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy, D: x^2 + y^2 = 2;$

b) $\iint_D y dx dy, D: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 1, y = x, y = 0, (y \geq 0);$

c) $\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy, D: x^2 + y^2 = 4, x = 0, y = 1, (x \leq 0, y \geq 1);$

d) $\iint_D x dx dy, D: x^2 + (y - 1)^2 = 1, y = x, (x \geq y);$

e*) $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, D: (x^2 + y^2)^2 - 4x(x^2 + y^2) = 4y^2, x^2 + y^2 = 4, (x \geq 0);$

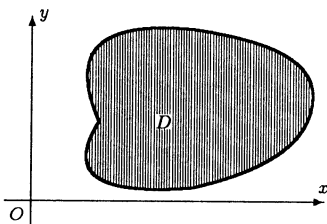
f*) $\iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, D: (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2, x = 0, (x \geq 0).$

5.4 Zastosowania całek podwójnych

● Fakt 5.4.1 (zastosowania w geometrii)

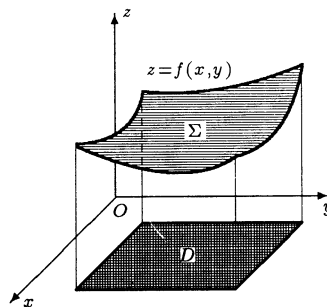
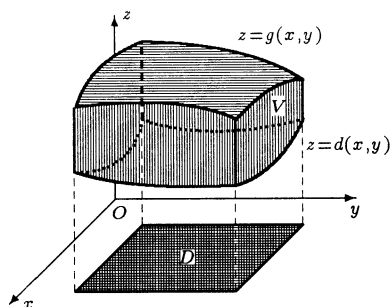
1. Pole obszaru $D \subset \mathbf{R}^2$ wyraża się wzorem:

$$|D| = \iint_D dP.$$



2. Objętość bryły V położonej nad obszarem $D \subset \mathbf{R}^2$ i ograniczonej z dołu i z góry odpowiednio powierzchniami $z = d(x, y)$ i $z = g(x, y)$, wyraża się wzorem:

$$|V| = \iint_D [g(x, y) - d(x, y)] dP.$$



3. Pole płata Σ , który jest wykresem funkcji $z = f(x, y)$, gdzie $(x, y) \in D$, wyraża się wzorem:

$$|\Sigma| = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dP.$$

Zakładamy tu, że funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na obszarze D .

○ Ćwiczenie 5.4.2

Obliczyć pola obszarów ograniczonych podanymi krzywymi:

- a) $x + y = 3$, $x = 0$, $y = 0$; b) $x = y^2$, $x = 1$;
 c) $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$; d) $xy = 1$, $y = x$, $y = 2x$ ($x, y > 0$);
 e) $y = \sqrt{|x|}$, $y = x^2$; f) $x^2 + y^2 = 2$, $y = 0$, $y = x\sqrt{x}$;
 g*) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, ($x \geq 0$); h) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, $y = x$ ($y \leq x$).

○ Ćwiczenie 5.4.3

Obliczyć objętości brył ograniczonych wskazanymi powierzchniami:

- a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 1$; b) $z = 5 - 2x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;
 c) $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 0$; d) $z = 9 - x^2$, $z = 0$, $y^2 = 3x$;
 e) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$;
 f) $z = e^{y-x}$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, ($x + y \leq 1$).

○ Ćwiczenie 5.4.4

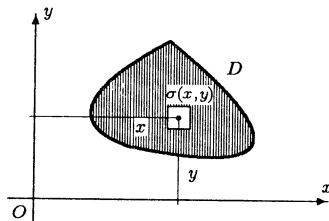
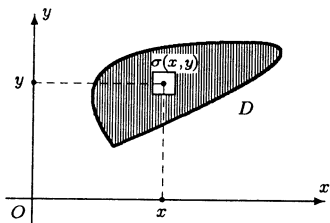
Obliczyć pola części powierzchni o równaniu $z = f(x, y)$ odciętych wskazanymi powierzchniami:

- a) $f(x, y) = 8 - 2x - 2y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 2x$;
 c) $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $z = 1$, $z = 2$; d) $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 = 8$;
 e) $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$; f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 1$, $z = 2$.

● **Fakt 5.4.5** (zastosowania w fizyce)

1. Masa obszaru D o gęstości powierzchniowej masy σ wyraża się wzorem:

$$M = \iint_D \sigma(x, y) dP.$$

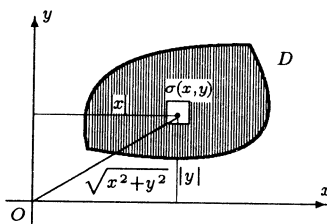
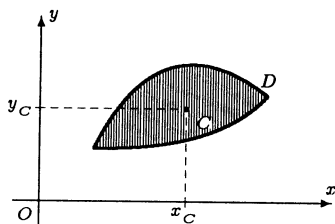


2. Momenty statyczne względem osi Ox i Oy obszaru D o gęstości powierzchniowej masy σ wyrażają się wzorami:

$$MS_x = \iint_D y\sigma(x, y) dP, \quad MS_y = \iint_D x\sigma(x, y) dP.$$

3. Współrzędne środka masy obszaru D o gęstości powierzchniowej masy σ wyrażają się wzorami:

$$x_c = \frac{MS_y}{M}, \quad y_c = \frac{MS_x}{M}.$$



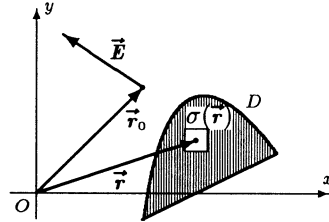
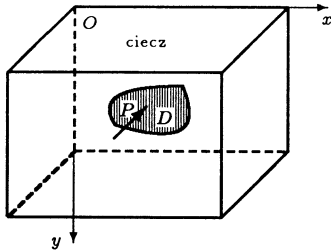
4. Momenty bezwładności względem osi Ox , Oy oraz punktu O obszaru D o gęstości powierzchniowej masy σ wyrażają się wzorami:

$$I_x = \iint_D y^2 \sigma(x, y) dP, \quad \iint_D I_y = x^2 \sigma(x, y) dP, \quad I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \sigma(x, y) dP.$$

5. Parcie P na jedną stronę płaskiej płytki D zanurzonej pionowo w cieczy o gęstości objętościowej γ_0 wyraża się wzorem:

$$P = g\gamma_0 \iint_D y \, dP,$$

gdzie y oznacza głębokość zanurzenia, a g oznacza przyspieszenie na powierzchni Ziemi.



6. Natężenie pola elektrycznego indukowane w punkcie \vec{r}_0 przez ładunek elektryczny o gęstości powierzchniowej ładunku σ , rozłożony w sposób ciągły na obszarze D , wyraża się wzorem:

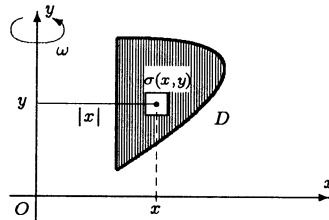
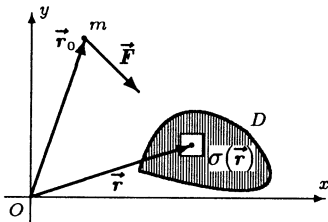
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_D \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}) \sigma(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \, dP,$$

gdzie $\vec{r} = (x, y)$, a ϵ_0 oznacza przenikalność elektryczną próżni.

7. Siła przyciągania grawitacyjnego masy m skupionej w punkcie \vec{r}_0 przez obszar D o gęstości powierzchniowej masy σ wyraża się wzorem:

$$\vec{F} = Gm \iint_D \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \sigma(\vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} \, dP,$$

gdzie $\vec{r} = (x, y)$, a G oznacza stałą grawitacji.



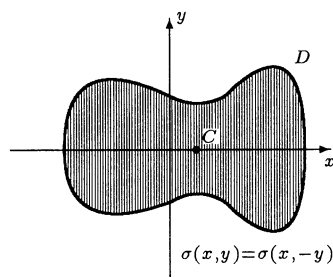
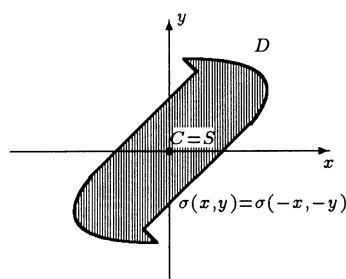
8. Energia kinetyczna obszaru D o gęstości powierzchniowej masy σ , obracającego się z prędkością kątową ω wokół osi Oy , wyraża się wzorem:

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \iint_D x^2 \sigma(x, y) \, dP.$$

Uwaga. Ładunek całkowity rozłożony na obszarze obliczamy podobnie jak masę obszaru. Wzór na natężenie pola grawitacyjnego jest analogiczny do wzoru na natężenie pola elektrycznego. Także wzór na siłę przyciągania pochodzącą od ładunków elektrycznych jest analogiczny do wzoru na siłę przyciągania grawitacyjnego. Wzory te są prawdziwe także dla obszarów płaskich położonych w przestrzeni. Wtedy przyjmujemy $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz $\vec{r} = (x, y, 0)$.

● **Fakt 5.4.6** (środek masy obszarów symetrycznych)

1. Gdy obszar na płaszczyźnie ma środek symetrii i gęstość powierzchniowa jest funkcją symetryczną względem tego środka (np. jest stała), to środek masy obszaru pokrywa się z jego środkiem symetrii.



2. Gdy obszar na płaszczyźnie ma oś symetrii i gęstość powierzchniowa jest funkcją symetryczną względem tej osi (np. jest stała), to środek masy obszaru leży na tej osi.

○ **Ćwiczenie 5.4.7**

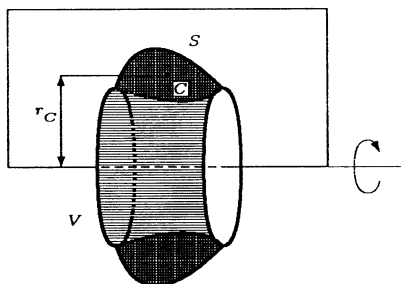
- a) Obliczyć masę obszaru D ograniczonego krzywymi $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$, jeżeli gęstość powierzchniowa masy w punkcie (x, y) tego obszaru wyraża się wzorem $\sigma(x, y) = xy$;
- b) Obliczyć moment statyczny jednorodnego trójkąta równobocznego o boku a i masie M . Moment statyczny obliczyć względem podstawy trójkąta;
- c) Wyznaczyć współrzędne środka masy jednorodnej ćwiartki koła o promieniu R ;
- d) Obliczyć moment bezwładności cienkiej jednorodnej tarczy w kształcie koła o promieniu R i masie M . Moment bezwładności obliczyć względem osi tarczy, która jest do niej prostopadła;
- e) Obliczyć parcie wody na zaporę w kształcie odwróconego trójkąta równoramiennego. Wysokość zapory wynosi 25 m, a długość na górze 50 m. Głębokość wody wynosi 15 m;
- f) Obliczyć natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez ładunek Q równomiernie rozłożony na kole o promieniu R . Natężenie pola obliczyć w punkcie położonym na wysokości h nad środkiem koła;
- g*) Obliczyć siłę, z jaką jednorodna płytka kwadratowa o boku a i masie M przyciąga masę m położoną w odległości d nad środkiem tej płytki;

- h) Obliczyć energię kinetyczną cienkiej jednorodnej tarczy kołowej o masie M i promieniu R , która obraca się z prędkością kątową ω wokół osi przechodzącej przez środek koła i prostopadłej do niej.
- **Fakt 5.4.8** (*I reguła Guldina*)

Niech S będzie figurą ograniczoną zawartą w półpłaszczyźnie. Objętość bryły V powstałej z obrotu figury S wokół krawędzi półpłaszczyzny wyraża się wzorem:

$$|V| = 2\pi r_c |S|,$$

gdzie r_c oznacza odległość środka masy figury S od osi obrotu, a $|S|$ oznacza pole tej figury.



Rys. 5.4.1. Bryła V powstała z obrotu figury S wokół krawędzi półpłaszczyzny.

○ **Ćwiczenie 5.4.9**

- Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu koła o promieniu r wokół prostej leżącej w płaszczyźnie koła, jeżeli odległość środka koła od osi obrotu wynosi R , $R > r$ (torus);
- Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu trójkąta równobocznego o boku a wokół osi równoległej do podstawy i położonej od niej w odległości b .

○ **Ćwiczenie 5.4.10**

Wykorzystując I regułę Guldina znaleźć położenia środków masy podanych figur jednorodnych:

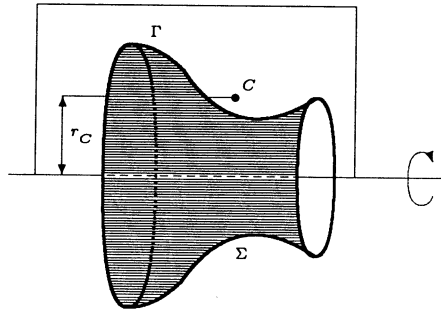
- Półkole o promieniu R ;
- Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a, b .

● **Fakt 5.4.11** (*II reguła Guldina*)

Niech Γ będzie krzywą ograniczoną zawartą w półpłaszczyźnie. Pole powierzchni Σ powstałej z obrotu krzywej Γ wokół krawędzi półpłaszczyzny wyraża się wzorem:

$$|\Sigma| = 2\pi r_c |\Gamma|,$$

gdzie r_c oznacza odległość środka masy krzywej Γ od osi obrotu, a $|\Gamma|$ oznacza długość tej krzywej.



Rys. 5.4.2. Powierzchnia Σ powstała z obrotu krzywej Γ wokół krawędzi półpłaszczyzny.

○ **Ćwiczenie 5.4.12**

- Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu okręgu o promieniu r wokół prostej leżącej w płaszczyźnie okręgu, jeżeli odległość środka okręgu od osi obrotu wynosi R , $R > r$ (torus);
- Obliczyć pole powierzchni bocznej stożka o tworzącej l i promieniu podstawy r .

○ **Ćwiczenie 5.4.13**

Wykorzystując II regułę Guldina znaleźć położenia środków masy podanych krzywych jednorodnych:

- Brzeg ćwiartki koła o promieniu R ;
- Brzeg trójkąta równoramiennego o podstawie a i wysokości h .

6

Całki potrójne

6.1 Całki potrójne po prostopadłościanie

Oznaczenia w definicji całki po prostopadłościanie:

$P = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q\}$ – prostopadłościan w przestrzeni;

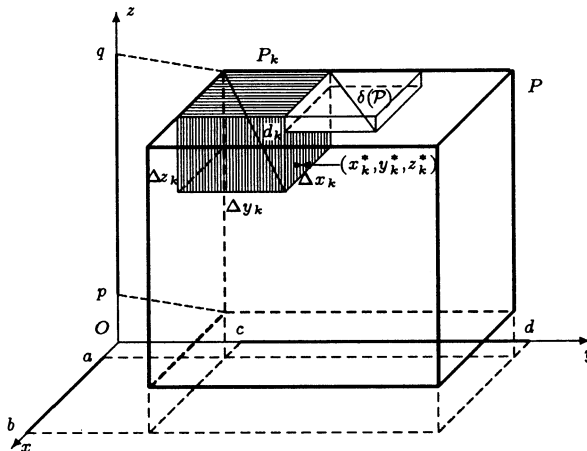
$\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ – podział prostopadłościanu P na prostopadłościany P_k , gdzie $1 \leq k \leq n$, prostopadłościany podziału całkowicie wypełniają prostopadłościan P i mają parami rozłączne wnętrza;

$\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ – wymiary prostopadłościanu P_k , gdzie $1 \leq k \leq n$;

$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2}$ – długość przekątnej prostopadłościanu P_k , gdzie $1 \leq k \leq n$;

$\delta(\mathcal{P}) = \max \{d_k : 1 \leq k \leq n\}$ – średnica podziału \mathcal{P} ;

$\Xi = \{(x_1^*, y_1^*, z_1^*), (x_2^*, y_2^*, z_2^*), \dots, (x_n^*, y_n^*, z_n^*)\}$, gdzie $(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \in P_k$ dla $1 \leq k \leq n$ – zbiór punktów pośrednich podziału \mathcal{P} .



Rys. 6.1.1. Podział \mathcal{P} prostopadłościanu $P = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.

● **Definicja 6.1.1** (całka potrójna po prostopadłościanie)

Niech funkcja f będzie ograniczona na prostopadłościanie P . Całkę potrójną z funkcji f po prostopadłościanie P definiujemy wzorem:

$$\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) (\Delta x_k) (\Delta y_k) (\Delta z_k),$$

o ile granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa i nie zależy od sposobu podziału \mathcal{P} prostopadłościanu P , ani od sposobu wyboru punktów pośrednich Ξ . Mówimy wtedy, że funkcja f jest całkowna na prostopadłościanie P .

Uwaga. Całkę potrójną z funkcji f po prostopadłościanie P oznaczamy też symbolem:

$$\iiint_P f(x, y, z) dV.$$

● **Fakt 6.1.2** (o całkowności funkcji ciągłej)

Funkcja ciągła na prostopadłościanie jest na nim całkowna.

● **Twierdzenie 6.1.3** (o liniowości całki)

Jeżeli funkcje f i g są całkowne na prostopadłościanie P oraz $c \in \mathbf{R}$, to:

a) funkcja $f + g$ jest całkowna na prostopadłościanie P oraz

$$\iiint_P (f(x, y, z) + g(x, y, z)) dV = \iiint_P f(x, y, z) dV + \iiint_P g(x, y, z) dV;$$

b) funkcja cf jest całkowna na prostopadłościanie P oraz

$$\iiint_P cf(x, y, z) dV = c \iiint_P f(x, y, z) dV.$$

● **Twierdzenie 6.1.4** (o addytywności względem obszaru całkowania)

Jeżeli funkcja f jest całkowna na prostopadłościanie P , to dla dowolnego podziału prostopadłościanu P na dwa prostopadłościany P_1 i P_2 o rozłącznych wnętrzach, funkcja f jest całkowna na P_1 i P_2 oraz

$$\iiint_P f(x, y, z) dV = \iiint_{P_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{P_2} f(x, y, z) dV.$$

● **Twierdzenie 6.1.5** (o zamianie całki potrójnej na całkę iterowaną)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostopadłościanie

$$P = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q\},$$

to

$$\iiint_P f(x, y, z) dV = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left[\int_p^q f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx.$$

Uwaga. Powyższe twierdzenie będzie prawdziwe także wtedy, gdy po prawej stronie równości napiszemy dowolną inną całkę iterowaną (jest sześć rodzajów całek iterowanych). Całkę iterowaną

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d \left[\int_p^q f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx$$

zapisujemy umownie w postaci

$$\int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x, y, z) dz.$$

Podobną umowę przyjmujemy dla pozostałych całek iterowanych. W wielu przypadkach wybór odpowiedniej kolejności całkowania pozwala znacznie uprościć obliczenia całki potrójnej.

○ **Ćwiczenie 6.1.6**

Obliczyć podane całki iterowane:

a) $\int_{-1}^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x^2 + y^2 + z^2) dz;$ b) $\int_0^1 dz \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^2 x \cos y dx;$

c) $\int_0^1 dy \int_0^2 dx \int_0^{2\pi} xy \sin^2 z dz;$ d) $\int_{-1}^1 dx \int_0^2 dz \int_0^{\pi} xz |\cos y| dy;$

e) $\int_1^2 dy \int_2^3 dz \int_3^4 \frac{1}{xyz} dx;$ f) $\int_0^1 dz \int_{-1}^1 dx \int_0^1 zx e^{xy} dy.$

○ **Ćwiczenie 6.1.7**

Obliczyć podane całki potrójne:

a) $\iiint_P (2x - y + 3z) dx dy dz, P = [-1, 1] \times [0, 1] \times [2, 4];$

b) $\iiint_P \frac{x}{yz} dx dy dz, P = [0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3];$

c) $\iiint_P zx \sin xy dx dy dz, P = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right] \times [0, \pi] \times [0, 1].$

● **Fakt 6.1.8** (całka z funkcji o rozdzielonych zmiennych)

Jeżeli

1. funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$,
2. funkcja g jest ciągła na przedziale $[c, d]$,
3. funkcja h jest ciągła na przedziale $[p, q]$,

to

$$\iiint_P f(x)g(y)h(z) dV = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \left(\int_c^d g(y) dy \right) \cdot \left(\int_p^q h(z) dz \right),$$

gdzie $P = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$.

○ Ćwiczenie 6.1.9

Korzystając z powyższego faktu obliczyć podane całki potrójne:

a) $\iiint_P yx^2 \sin z dx dy dz, P = [0, 1] \times [-1, 1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$

b) $\iiint_P e^{2z+y-x} dx dy dz, P = [0, \ln 2] \times [0, \ln 3] \times [0, 1];$

c) $\iiint_P \ln x^{y^z} dx dy dz, P = [1, e] \times [1, 2] \times [2, 3].$

6.2 Całki potrójne po obszarach normalnych

● Definicja 6.2.1 (całka potrójna po obszarze)

Niech f będzie funkcją ograniczoną na obszarze ograniczonym $U \subset \mathbf{R}^3$ oraz niech P będzie dowolnym prostopadłościem zawierającym obszar U . Ponadto niech f^* oznacza rozszerzenie funkcji f na P określone wzorem:

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{dla } (x, y, z) \in U, \\ 0 & \text{dla } (x, y, z) \in P \setminus U. \end{cases}$$

Całkę potrójną funkcji f po obszarze U definiujemy wzorem:

$$\iiint_U f(x, y, z) dV \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_P f^*(x, y, z) dV,$$

o ile całka po prawej stronie znaku równości istnieje. Mówimy wtedy, że funkcja f jest całkowna na obszarze U .

Uwaga. Całka $\iiint_P f^*(x, y, z) dV$ nie zależy od wyboru prostopadłościu P .

● Definicja 6.2.2 (obszary normalne względem płaszczyzn układu)

a) Obszarem normalnym względem płaszczyzny xOy nazywamy zbiór:

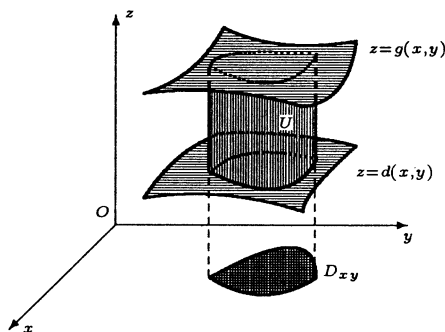
$$\{(x, y, z) : (x, y) \in D_{xy}, d(x, y) \leq z \leq g(x, y)\},$$

gdzie D_{xy} jest obszarem regularnym na płaszczyźnie xOy , a funkcje d i g są ciągłe na D_{xy} , przy czym $d(x, y) < g(x, y)$ dla punktów (x, y) należących do wnętrza obszaru D_{xy} .

b) Obszarem normalnym względem płaszczyzny xOz nazywamy zbiór:

$$\{(x, y, z) : (x, z) \in D_{xz}, p(x, z) \leq y \leq q(x, z)\},$$

gdzie D_{xz} jest obszarem regularnym na płaszczyźnie xOz , a funkcje p i q są ciągłe na D_{xz} , przy czym $p(x, z) < q(x, z)$ dla punktów (x, z) należących do wnętrza obszaru D_{xz} .



Rys. 6.2.1. Obszar normalny względem płaszczyzny xOy .

c) Obszarem normalnym względem płaszczyzny yOz nazywamy zbiór:

$$\{(x, y, z) : (y, z) \in D_{yz}, r(y, z) \leq x \leq s(y, z)\},$$

gdzie D_{yz} jest obszarem regularnym na płaszczyźnie yOz , a funkcje r i s są ciągłe na D_{yz} , przy czym $r(y, z) < s(y, z)$ dla punktów (y, z) należących do wnętrza obszaru D_{yz} .

○ **Ćwiczenie 6.2.3**

Zbadać, względem których płaszczyzn obszary ograniczone podanymi powierzchniami są normalne:

- a) $x + y + z = 1, x^2 + y^2 = 1, z = 0;$ b) $y^2 + z^2 = 4x, x = 2;$
- c) $y = x^2, x = y^2, z = xy, z = 0;$ d) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 9.$

○ **Ćwiczenie 6.2.4**

Podane obszary zapisać jako obszary normalne względem płaszczyzn układu współrzędnych (rozważyć wszystkie przypadki):

- a) kula $U : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2;$ b) stożek $U : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq H;$
- c) walec $U : x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq H;$ d) paraboloida $U : x^2 + y^2 \leq z \leq H.$

● **Twierdzenie 6.2.5 (całki iterowane po obszarach normalnych)**

Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze

$$U = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, d(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$$

normalnym względem płaszczyzny xOy , gdzie funkcje d i g są ciągłe na obszarze regularnym D , to

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{d(x,y)}^{g(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dP.$$

Uwaga. Prawdziwe są także analogiczne wzory z całkami iterowanymi po obszarach normalnych względem pozostałych płaszczyzn układu. Jeżeli obszar U normalny względem płaszczyzny xOy można zapisać w postaci

$$U = \left\{ (x, y, z) : a \leq x \leq b, \tilde{d}(x) \leq y \leq \tilde{g}(x), d(x, y) \leq z \leq g(x, y) \right\}$$

to wzór z powyższego twierdzenia otrzyma postać

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{\tilde{d}(x)}^{\tilde{g}(x)} dy \int_{d(x,y)}^{g(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

○ Ćwiczenie 6.2.6

Całkę potrójną $\iiint_U f(x, y, z) dV$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar U ograniczony jest podanymi powierzchniami:

czony jest podanymi powierzchniami:

a) $2x + 3y + 4z = 12, x = 0, y = 0, z = 0;$

b) $y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = 1;$

c) $y = x^2 + z^2, y = 8 - x^2 - z^2;$

d) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

○ Ćwiczenie 6.2.7

Obliczyć podane całki potrójne po obszarach ograniczonych wskazanymi powierzchniami:

a) $\iiint_V xy \, dx dy dz, U : y = 0, y = x, x = \sqrt{9 - z^2};$

b) $\iiint_V y \, dx dy dz, U : z = y, z = 0, y = 1 - x^2;$

c) $\iiint_V (x^2 + y^2) \, dx dy dz, U : z = y^2 - x^2, x = 0, y = 1, y = x, z = 0;$

d) $\iiint_V \cos \frac{z}{y} \, dx dy dz, U : y = \frac{\pi}{6}, y = x, x = \frac{\pi}{2}, z = xy, z = 0;$

e) $\iiint_V x^2 y z \, dx dy dz, U : x = 2, y = -x, y = x^2, z = 0, z = x + y.$

● Definicja 6.2.8 (obszar regularny w przestrzeni)

Sumę skończonej liczby obszarów normalnych względem płaszczyzn układu o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy obszarem regularnym w przestrzeni.

● Fakt 6.2.9 (całka po obszarze regularnym w przestrzeni)

Niech obszar regularny U będzie sumą obszarów normalnych U_1, U_2, \dots, U_n o parami rozłącznych wnętrzach oraz niech funkcja f będzie całkowalna na obszarze U . Wtedy

$$\iiint_U f(x, y, z) dV = \iiint_{U_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{U_2} f(x, y, z) dV + \dots + \iiint_{U_n} f(x, y, z) dV.$$

Uwaga. Całki po obszarach regularnych mają te same własności co całki po prostopadłościanach (liniowość, addytywność względem obszaru całkowania).

● **Definicja 6.2.10** (całka potrójna z funkcji wektorowej)

Niech funkcje F_1, F_2, F_3 będą całkowlane na obszarze regularnym $U \subset \mathbf{R}^3$. Całkę z funkcji wektorowej $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ określamy wzorem:

$$\iiint_U \vec{F}(x, y, z) dV \stackrel{\text{def}}{=} \left(\iiint_U F_1(x, y, z) dV, \iiint_U F_2(x, y, z) dV, \iiint_U F_3(x, y, z) dV \right).$$

● **Definicja 6.2.11** (wartość średnia funkcji na obszarze)

Wartością średnią funkcji f na obszarze U nazywamy liczbę:

$$f_{\text{sr}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|U|} \iiint_U f(x, y, z) dV,$$

gdzie $|U|$ oznacza objętość obszaru U .

○ **Ćwiczenie 6.2.12**

Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych obszarach:

a) $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $U = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$;

b) $f(x, y, z) = x + y + z$, $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x + y\}$.

● **Twierdzenie 6.2.13** (o wartości średniej dla całek potrójnych)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze normalnym U , to

$$\bigvee_{(x_0, y_0, z_0) \in U} f_{\text{sr}} = f(x_0, y_0, z_0).$$

○ **Ćwiczenie 6.2.14** (interpretacja geometryczna i fizyczna całek potrójnych)

a) Wyprowadzić wzór na objętość obszaru $U \subset \mathbf{R}^3$;

b) Wyprowadzić wzór na masę obszaru materialnego $U \subset \mathbf{R}^3$, którego gęstość objętościowa masy w punkcie $(x, y, z) \in U$ jest równa $\gamma(x, y, z)$;

c) Wyprowadzić wzory na momenty bezwładności (względem osi układu) obszaru materialnego $U \subset \mathbf{R}^3$ o gęstości objętościowej masy γ ;

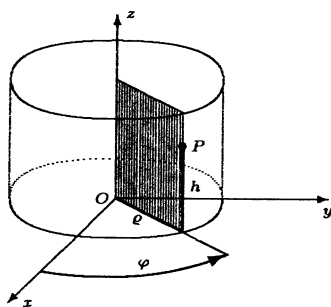
d) Wyprowadzić wzór na natężenie pola elektrostatycznego w punkcie \vec{r}_0 pochodzące od ładunku elektrycznego rozłożonego w obszarze $U \subset \mathbf{R}^3$ z gęstością objętościową ładunku γ .

6.3 Zamiana zmiennych w całkach potrójnych

● **Definicja 6.3.1** (współrzędne walcowe)

Położenie punktu P w przestrzeni można opisać trójką liczb (φ, ρ, h) , gdzie:

φ – oznacza miarę kąta między rzutem promienia wodzącego punktu P na płaszczyznę xOy , a dodatnią częścią osi Ox , $0 \leq \varphi < 2\pi$ albo $-\pi < \varphi \leq \pi$,



Rys. 6.3.1. Współrzędne walcowe punktu w przestrzeni.

ρ – oznacza odległość rzutu punktu P na płaszczyznę xOy od początku układu współrzędnych, $0 \leq \rho < \infty$,

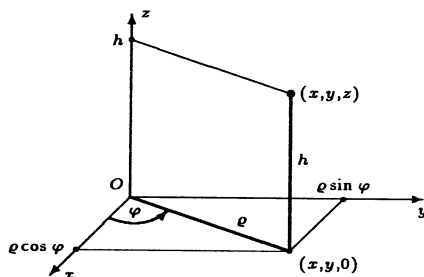
h – oznacza odległość (dodatnią lub ujemną) punktu P od płaszczyzny xOy , $-\infty < h < \infty$.

● **Fakt 6.3.2** (zamiana współrzędnych walcowych na kartezjańskie)

Współrzędne kartezjańskie (x, y, z) punktu przestrzeni danego we współrzędnych walcowych (φ, ρ, h) określone są wzorami:

$$\mathcal{W} : \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = h. \end{cases}$$

Uwaga. Przekształcenie \mathcal{W} , które punktowi (φ, ρ, h) przyporządkowuje punkt (x, y, z) określony powyższymi wzorami, nazywamy przekształceniem walcowym.



Rys. 6.3.2. Zamiana współrzędnych walcowych na kartezjańskie.

○ **Ćwiczenie 6.3.3**

Podać opisy we współrzędnych walcowych podanych obszarów:

- Walec o promieniu $r > 0$, którego osią jest oś Oz , ograniczony płaszczyznami $z = a$, $z = b$, gdzie $a < b$;
- stożek ograniczony powierzchnią stożkową $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$ oraz płaszczyzną $z = a$, gdzie $k > 0$, $a > 0$;
- bryła ograniczona powierzchnią paraboloidy obrotowej $z = a(x^2 + y^2)$ i płaszczyzną $z = b$, gdzie $a > 0$, $b > 0$;

d) kula o środku w początku układu i promieniu $r > 0$.

● **Twierdzenie 6.3.4** (współrzędne walcowe w całce potrójnej)

Niech

1. obszar Ω we współrzędnych walcowych będzie obszarem normalnym
2. funkcja f będzie ciągła na obszarze U , który jest obrazem obszaru Ω przy przekształceniu walcowym; $U = \mathcal{W}(\Omega)$.

Wtedy

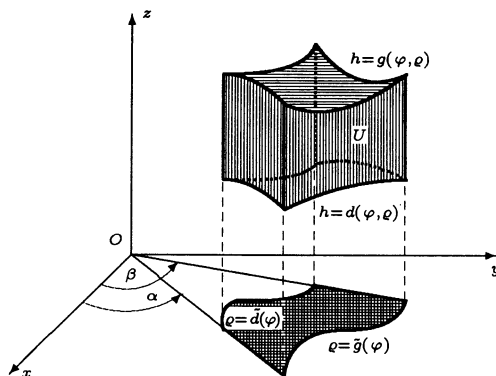
$$\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, h) \varrho dh d\varrho d\varphi.$$

Uwaga. Jeżeli we współrzędnych walcowych obszar Ω ma postać:

$$\Omega = \{(\varphi, \varrho, h) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, \tilde{d}(\varphi) \leq \varrho \leq \tilde{g}(\varphi), d(\varphi, \varrho) \leq h \leq g(\varphi, \varrho)\},$$

gdzie funkcje \tilde{d} i \tilde{g} są ciągłe na przedziale $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$, a funkcje d i g są ciągłe na obszarze $\{(\varphi, \varrho) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, \tilde{d}(\varphi) \leq \varrho \leq \tilde{g}(\varphi)\}$, to

$$\iiint_{\Omega} f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, h) \varrho dh d\varrho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\tilde{d}(\varphi)}^{\tilde{g}(\varphi)} d\varrho \int_{d(\varphi, \varrho)}^{g(\varphi, \varrho)} f(\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, h) \varrho dh.$$



Rys. 6.3.3. Ilustracja do twierdzenia o zamianie zmiennych na współrzędne walcowe w całce potrójnej.

Współrzędne walcowe stosujemy głównie wtedy, gdy obszar całkowania jest ograniczony fragmentami powierzchni walców, sfer, stożków lub płaszczyzn.

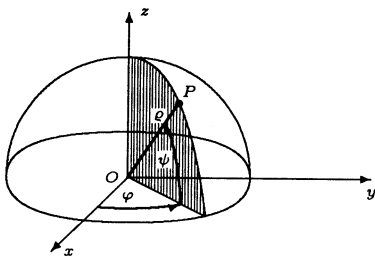
○ **Ćwiczenie 6.3.5**

Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć podane całki po obszarach ograniczonych wskazanymi powierzchniami:

- a) $\iiint_U x^2 dx dy dz, U : z = 9 - x^2 - y^2, z = 0;$
- b) $\iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz, U : z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8;$
- c) $\iiint_U z^2 dx dy dz, U : z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2};$
- d) $\iiint_U xyz dx dy dz, U : x^2 + y^2 + z^2 = 4;$
- e*) $\iiint_U \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, U : z = x^2 + y^2, z = 1, z = 4;$
- f*) $\iiint_U dx dy dz, U : z = x^2 + y^2, z = 4x.$

● **Definicja 6.3.6** (*współrzędne sferyczne*)

Położenie punktu P w przestrzeni można opisać trójką liczb (φ, ψ, ϱ) , gdzie φ – oznacza miarę kąta między rzutem promienia wodzącego punktu P na płaszczyznę xOy , a dodatnią częścią osi Ox , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ albo $-\pi < \varphi \leq \pi$;
 ψ – oznacza miarę kąta między promieniem wodzącym punktu P , a płaszczyzną xOy , $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$;
 ϱ – oznacza odległość punktu P od początku układu współrzędnych, $0 \leq \varrho < \infty$.



Rys. 6.3.4. Współrzędne sferyczne punktu w przestrzeni.

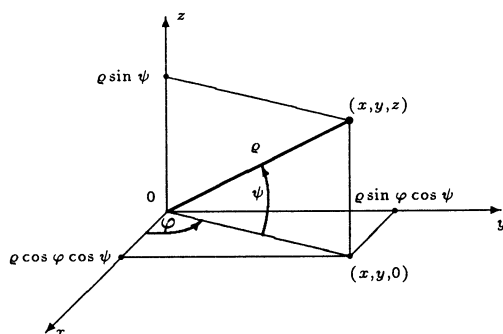
Uwaga. Współrzędne sferyczne (φ, ψ, ϱ) punktów położonych na powierzchni Ziemi są odpowiednio długością i szerokością geograficzną, a ϱ jest promieniem Ziemi.

● **Fakt 6.3.7** (*zamiana współrzędnych sferycznych na kartezjańskie*)

Współrzędne kartezjańskie punktu (x, y, z) w przestrzeni danego we współrzędnych sferycznych (φ, ψ, ϱ) określone są wzorami:

$$S : \begin{cases} x = \varrho \cos \varphi \cos \psi, \\ y = \varrho \sin \varphi \cos \psi, \\ z = \varrho \sin \psi. \end{cases}$$

Uwaga. Przekształcenie \mathcal{S} , które punktowi (φ, ψ, ρ) przyporządkowuje punkt (x, y, z) określony powyższymi wzorami, nazywamy przekształceniem sferycznym.



Rys. 6.3.5. Zamiana współrzędnych sferycznych na kartezjańskie.

○ Ćwiczenie 6.3.8

Podać opisy we współrzędnych sferycznych danych obszarów:

- kula o środku w początku układu i promieniu r , gdzie $r > 0$;
- cząska kulista ograniczona powierzchnią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ i płaszczyzną $z = a$, gdzie $0 < a < r$;
- stożek ograniczony powierzchniami $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = a$, gdzie $k > 0$, $a > 0$;
- kula o środku $(r, 0, 0)$ i promieniu r , gdzie $r > 0$;
- kula o środku $(0, r, 0)$ i promieniu r , gdzie $r > 0$;
- kula o środku $(0, 0, r)$ i promieniu r , gdzie $r > 0$;
- górną półkulę wydrążoną o środku w początku układu, promieniu wewnętrznym r_1 i promieniu zewnętrznym r_2 , gdzie $0 < r_1 < r_2$;
- wycinek kuli o środku w początku układu i promieniu r ograniczony półpłaszczyznami przechodzącymi przez oś Oz i tworzącymi kąty α i β z dodatnią częścią osi Ox , gdzie $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$ oraz $r > 0$.

● Twierdzenie 6.3.9 (współrzędne sferyczne w całce potrójnej)

Niech

- obszar Ω we współrzędnych sferycznych będzie obszarem normalnym;
- funkcja f będzie ciągła na obszarze U , który jest obrazem obszaru Ω przy przekształceniu sferycznym; $U = \mathcal{S}(\Omega)$.

Wtedy

$$\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \varphi \cos \psi, \rho \sin \varphi \cos \psi, \rho \sin \psi) \rho^2 \cos \psi d\rho d\psi d\varphi.$$

Uwaga. Jeżeli we współrzędnych sferycznych obszar Ω ma postać:

$$\left\{ (\varphi, \psi, \rho) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, \tilde{d}(\varphi) \leq \psi \leq \tilde{g}(\varphi), d(\varphi, \psi) \leq \rho \leq g(\varphi, \psi) \right\},$$

gdzie funkcje \tilde{d} i \tilde{g} są ciągłe na przedziale $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$, a funkcje d i g są ciągłe

na obszarze $\{(\varphi, \psi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, \tilde{d}(\varphi) \leq \psi \leq \tilde{g}(\varphi)\}$, to

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \varphi \cos \psi, \rho \sin \varphi \cos \psi, \rho \sin \psi) \rho^2 \cos \psi \, d\rho d\psi d\varphi = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\tilde{d}(\varphi)}^{\tilde{g}(\varphi)} d\psi \int_{d(\varphi, \psi)}^{g(\varphi, \psi)} f(\rho \cos \varphi \cos \psi, \rho \sin \varphi \cos \psi, \rho \sin \psi) \rho^2 \cos \psi \, d\rho. \end{aligned}$$

Współrzędne sferyczne stosujemy głównie do opisu obszarów całkowania, które są ograniczone fragmentami powierzchni sfer, stożków lub płaszczyzn.

○ Ćwiczenie 6.3.10

Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć podane całki potrójne po obszarach ograniczonych wskazanymi powierzchniami:

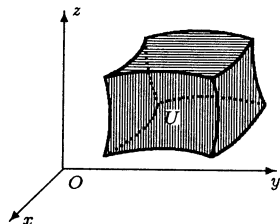
- a) $\iiint_U z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz$, $U : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = 0$;
- b) $\iiint_U \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}$, $U : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z = \frac{1}{2}$;
- c) $\iiint_U (x^2 + y^2) \, dx dy dz$, $U : z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- d) $\iiint_U \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $U : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 16$;
- e) $\iiint_U \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy dz$, $U : x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$;
- f) $\iiint_U xyz \, dx dy dz$, $U : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x = 0, y = 0, z = 0$ (I oktant);
- g*) $\iiint_U (x^2 + y^2) \, dx dy dz$, $U : x^2 + y^2 = 4, z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0$.

6.4 Zastosowania całek potrójnych

● Fakt 6.4.1 (zastosowania w geometrii)

Objętość obszaru $U \subset \mathbf{R}^3$ wyraża się wzorem:

$$|U| = \iiint_U dV.$$



○ **Ćwiczenie 6.4.2**

Obliczyć objętości obszarów ograniczonych podanymi powierzchniami:

a) $3x + 6y + 4z = 12, x = 0, y = 0, z = 0;$ b) $y = x^2, y + z = 4, x = 0, z = 0;$

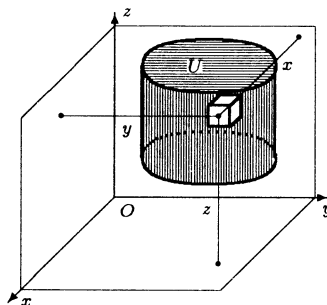
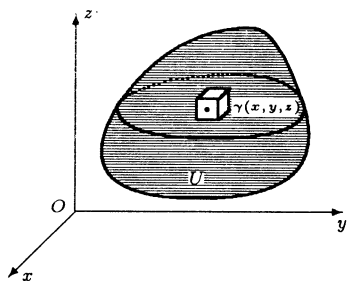
c) $y^2 + z^2 = 1, y = x, x = 0;$ d) $x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 = 4x;$

e) $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = \sqrt{x^2 + y^2};$ f) $z = 4x^2 + y^2, z = 4 - 3y^2.$

● **Fakt 6.4.3 (zastosowania w fizyce)**

1. Masa obszaru $U \subset \mathbf{R}^3$ o gęstości objętościowej masy γ wyraża się wzorem:

$$M = \iiint_U \gamma(x, y, z) dV.$$



2. Momenty statyczne względem płaszczyzn układu współrzędnych obszaru $U \subset \mathbf{R}^3$ o gęstości objętościowej masy γ wyrażają się wzorami:

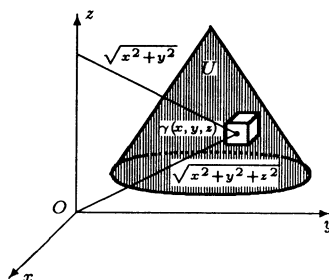
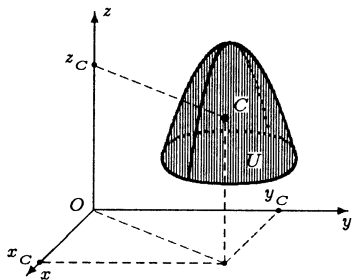
$$MS_{xy} = \iiint_U z\gamma(x, y, z) dV,$$

$$MS_{xz} = \iiint_U y\gamma(x, y, z) dV,$$

$$MS_{yz} = \iiint_U x\gamma(x, y, z) dV.$$

3. Współrzędne środka masy obszaru $U \subset \mathbf{R}^3$ o gęstości objętościowej masy γ wyrażają się wzorami:

$$x_c = \frac{MS_{yz}}{M}, \quad y_c = \frac{MS_{xz}}{M}, \quad z_c = \frac{MS_{xy}}{M}.$$



4. Momenty bezwładności względem osi Ox , Oy , Oz oraz punktu O obszaru $U \subset \mathbf{R}^3$ o gęstości objętościowej masy γ wyrażają się wzorami:

$$I_x = \iiint_U (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV,$$

$$I_y = \iiint_U (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV,$$

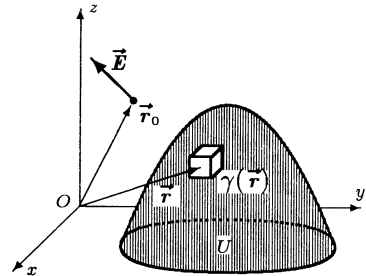
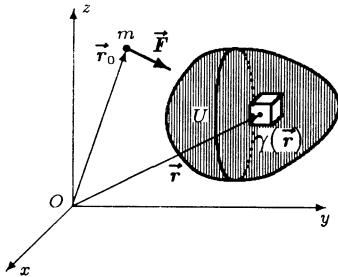
$$I_z = \iiint_U (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dV,$$

$$I_O = \iiint_U (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dV.$$

5. Siła przyciągania grawitacyjnego masy m skupionej w punkcie \vec{r}_0 przez obszar $U \subset \mathbf{R}^3$ o gęstości objętościowej masy γ wyraża się wzorem:

$$\vec{F} = Gm \iiint_U \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0) \gamma(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} dV,$$

gdzie G oznacza stałą grawitacji.



6. Natężenie pola elektrycznego w punkcie \vec{r}_0 , wywołane przez ładunek elektryczny rozłożony z gęstością objętościową ładunku γ na obszarze $U \subset \mathbf{R}^3$, wyraża się wzorem:

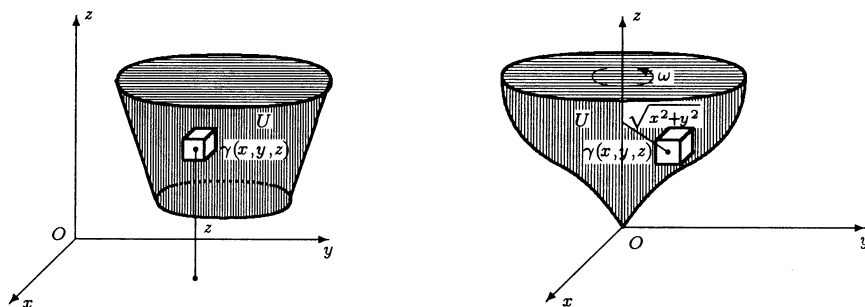
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_U \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}) \gamma(\vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|^3} dV,$$

gdzie ϵ_0 oznacza przenikalność elektryczną próżni.

7. Energia potencjalna względem płaszczyzny xOy obszaru $U \subset \mathbf{R}^3$ o gęstości objętościowej masy wyraża się wzorem:

$$E_p = g \iiint_U z \gamma(x, y, z) dV,$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie. Zakładamy tutaj, że pole grawitacyjne jest jednorodne.



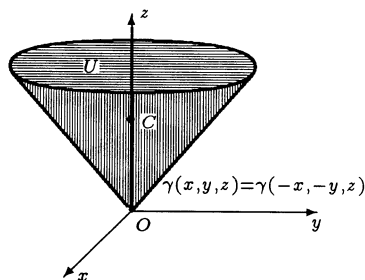
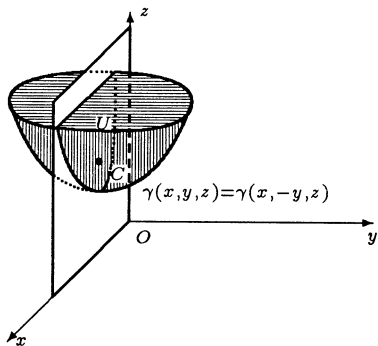
8. Energia kinetyczna obszaru $U \subset \mathbf{R}^3$ o gęstości objętościowej masy γ , obracającego się z prędkością kątową ω wokół osi Oz , wyraża się wzorem:

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \iiint_U (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dV.$$

Uwaga. Wzory określające ładunek całkowity, siłę przyciągania elektrycznego oraz natężenie pola grawitacyjnego są podobne do podanych wyżej.

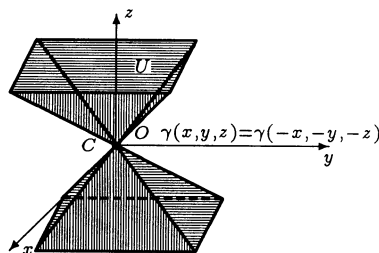
● **Fakt 6.4.4** (środkie masy brył symetrycznych)

1. Jeżeli bryła w przestrzeni ma płaszczyznę symetrii i gęstość objętościowa masy jest funkcją symetryczną względem tej płaszczyzny (np. jest stała), to środek masy bryły leży na tej płaszczyźnie.



2. Jeżeli bryła w przestrzeni ma oś symetrii i gęstość objętościowa masy jest funkcją symetryczną względem tej osi (np. jest stała), to środek masy bryły leży na tej osi.

3. Jeżeli bryła w przestrzeni ma środek symetrii i gęstość objętościowa masy jest funkcją symetryczną względem tego środka (np. jest stała), to środek masy bryły pokrywa się ze środkiem symetrii.



○ **Ćwiczenie 6.4.5**

- a) Znaleźć masę kuli o promieniu R , jeżeli gęstość masy w odległości r od środka kuli wynosi r^2 ;
- b) Jednorodna bryła o masie M jest ograniczona płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 3$. Obliczyć momenty statyczne tej bryły względem płaszczyzn układu współrzędnych;
- c) Znaleźć położenie środka masy jednorodnej bryły ograniczonej powierzchniami $z = x^2 + y^2$, $z = 4$;
- d) Jednorodna półkula o promieniu R ma masę M . Obliczyć moment bezwładności tej półkuli względem jej osi symetrii;
- e) Jednorodny bąk o masie M ma kształt stożka o wysokości H i promieniu R . Obliczyć moment bezwładności tego bąka względem jego wierzchołka;
- f*) Obliczyć siłę, z jaką jednorodna kula o promieniu R i masie M przyciąga masę punktową m położoną w odległości r od środka kuli. Rozważyć przypadki $r < R$, $r = R$, $r > R$;
- g) Obliczyć energię potencjalną jednorodnej kuli o masie M i promieniu R , której środek jest położony w odległości H od powierzchni Ziemi;
- h*) Obliczyć energię kinetyczną jednorodnego walca o masie M , średnicy d i wysokości H , toczącego się bez poślizgu z prędkością v po poziomej płaszczyźnie;
- i*) Sześcian o krawędzi długości a został jednorodnie naładowany ładunkiem elektrycznym Q . Obliczyć natężenie pola elektrycznego pochodzącego od tego ładunku w wierzchołku sześcianu.

Literatura

1. A.Birkholc, *Analiza matematyczna, Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa 1986.
2. L.M.Drużkowski, *Analiza matematyczna dla fizyków, cz. I. Podstawy*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1995.
3. L.Górniewicz, R.Ingarden, *Analiza matematyczna dla fizyków*, T. 1–2, Wydawnictwo Uniwersytetu Toruńskiego, Toruń 1995.
4. G.Kwiecińska, *Analiza matematyczna*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 1995.
5. G.M.Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, T. I, II, III, PWN, Warszawa 1995.
6. R.Leitner, *Zarys matematyki wyższej dla studiów technicznych, cz. I, II*, WNT, Warszawa 1994.
7. F.Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1977.
8. M.Mączyński, J.Muszyński, T.Traczyk, W.Żakowski, *Matematyka – podręcznik podstawowy dla WST*, T. I, II, PWN, Warszawa 1979, 1981.
9. H. i J.Musielakowie, *Analiza matematyczna, T.I, cz. 1-2*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1993.
10. R.Sikorski, *Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa 1980.
11. A.Softysiak, *Analiza matematyczna, cz. I i II*, Wydawnictwo UAM, Poznań 1995.
12. T.Trajdos, *Matematyka, cz. III*, WNT, Warszawa 1993.
13. E.Złotkiewicz, *Wykład z analizy matematycznej*, Wydawnictwo UMCS, Lublin 1997.
14. W.Żakowski, W.Kołodziej, *Matematyka, cz. II*, WNT, Warszawa 1992.