Analiza Matematyczna 1 - karta wzorów

Zamiana logarytmów

$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Trygonometria

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

Granica funkcji

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$	$y = Ax + B$ jest asymptotą w $\pm\infty$ gdy $A = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ oraz $B = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - Ax)$

Pochodne

$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$		$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0; f(x_0))$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Jeżeli na przedziale I zachodzi $f''(x) > 0$, to funkcja f jest wypukła w dół (uśmiechnięta) 😊.
Jeżeli na przedziale I zachodzi $f''(x) < 0$, to funkcja f jest wypukła w górę (smutna) 😔.

Całki nieoznaczone

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$		

Uniwersalne podstawienie trygonometryczne:

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Całki oznaczone

Objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót wykresu funkcji $f : [a; b] \to R$:

dokoła osi Ox $\quad V_f = \pi \int_a^b f^2(x)dx$, dokoła osi Oy $\quad V_f = 2\pi \int_a^b x f(x)dx$

Pole powierzchni bocznej bryły obrotowej powstałej przez obrót wykresu funkcji $f : [a; b] \to R$ dokoła osi Ox:

$$P_f = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Długość krzywej wykresu funkcji $f : [a; b] \to R$:

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Uwaga. Ta karta wzorów jest tylko przypomnieniem wzórów, które każdy student powinien rozumieć i umieć zastosować. Wzory nie zawierają więc niezbędnych założeń, które każdy, kto korzysta z tej karty powinien znać.

Opracował J.Wierzejewski

Analiza Matematyczna 2 - karta wzorów

Całki niewłaściwe

$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p} < \infty \Leftrightarrow p > 1$

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} < \infty \Leftrightarrow 0 < p < 1$

Szeregi

Kryterium d'Alemberta. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$. Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny jeśli $q < 1$, a rozbieżny jeśli $q > 1$

Kryterium Cauchy'ego. Niech $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$. Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny jeśli $q < 1$, a rozbieżny jeśli $q > 1$

Twierdzenie Leibnitza o szeregu naprzemiennym
Jeżeli $b_n \searrow 0$, to $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n < \infty$. Ponadto dla każdego $N \geq 1$ $\left|S - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} b_n\right| \leq b_{N+1}$

Promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ jest równy $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$

Pochodne

$\Delta_z \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right| \Delta_y$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) \circ \vec{v}$

Jeśli $P = (x_0, y_0)$ jest punktem stacjonarnym f i $H = \begin{vmatrix} f^{(2)}_{xx}(x_0, y_0) & f^{(2)}_{xy}(x_0, y_0) \\ f^{(2)}_{yx}(x_0, y_0) & f^{(2)}_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$, to
Jeśli $H > 0$, to f ma w punkcie P ekstremum lokalne właściwe (minimum gdy $f^{(2)}_{xx}(x_0, y_0) > 0$)
Jeśli $H < 0$, to f nie ma w punkcie P ekstremum lokalnego.

Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w punkcie (x_0, y_0, z_0)
$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$

Równanie płaszczyzny stycznej w punkcie (x_0, y_0, z_0) do powierzchni wyznaczonej przez $F(x, y, z) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

Równanie prostej stycznej w punkcie (x_0, y_0) do krzywej wyznaczonej przez $F(x, y) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$

Całki podwójne

Pole płata $\Sigma = \{(x; y; f(x, y)) : (x; y) \in D\}$ $|\Sigma| = \iint\limits_D \sqrt{1 + {f_x}^2 + {f_y}^2}\, dxdy$

Momenty statyczne i współrzędne środka masy obszaru D o masie M i gęstości powierzchniowej σ
$MS_x = \iint\limits_D y\sigma(x, y) dxdy$ $\quad MS_y = \iint\limits_D x\sigma(x, y) dxdy$ $\quad x_{\mathrm{M}} = \frac{MS_y}{M}$ $\quad y_{\mathrm{M}} = \frac{MS_x}{M}$

Momenty bezwładności względem osi oraz początku układu współrzędnych obszaru D o gęstości powierzchniowej σ
$I_x = \iint\limits_D y^2 \sigma(x, y) dxdy$ $\quad I_y = \iint\limits_D x^2 \sigma(x, y) dxdy$ $\quad I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \sigma(x, y) dxdy$

Całki potrójne

Współrzędne walcowe $\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = h \end{cases}$ $\quad J = \rho$

Współrzędne sferyczne $\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \cos\psi \\ y = \rho \sin\varphi \cos\psi \\ z = \rho \sin\psi \end{cases}$ $\quad J = \rho^2 \cos\psi$

Momenty statyczne i współrzędne środka masy obszaru D o masie M i gęstości σ
$MS_{xy} = \iint\limits_D z\sigma(x, y, z) dxdydz$ $\quad MS_{xz} = \iint\limits_D y\sigma(x, y, z) dxdydz$ $\quad MS_{yz} = \iint\limits_D x\sigma(x, y, z) dxdydz$
$x_{\mathrm{M}} = \frac{MS_{yz}}{M}$ $\quad y_{\mathrm{M}} = \frac{MS_{xz}}{M}$ $\quad z_{\mathrm{M}} = \frac{MS_{xy}}{M}$

Momenty bezwładności względem osi oraz początku układu współrzędnych obszaru D o gęstości σ
$I_x = \iint\limits_D (y^2 + z^2) \sigma(x, y, z) dxdydz$ $\quad I_y = \iint\limits_D (x^2 + z^2) \sigma(x, y, z) dxdydz$ $\quad I_z = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \sigma(x, y, z) dxdydz$
$I_O = \iint\limits_D (x^2 + y^2 + z^2) \sigma(x, y, z) dxdydz$